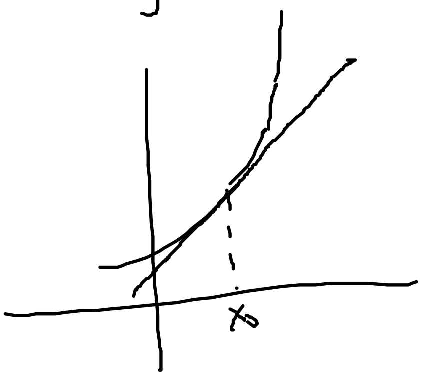
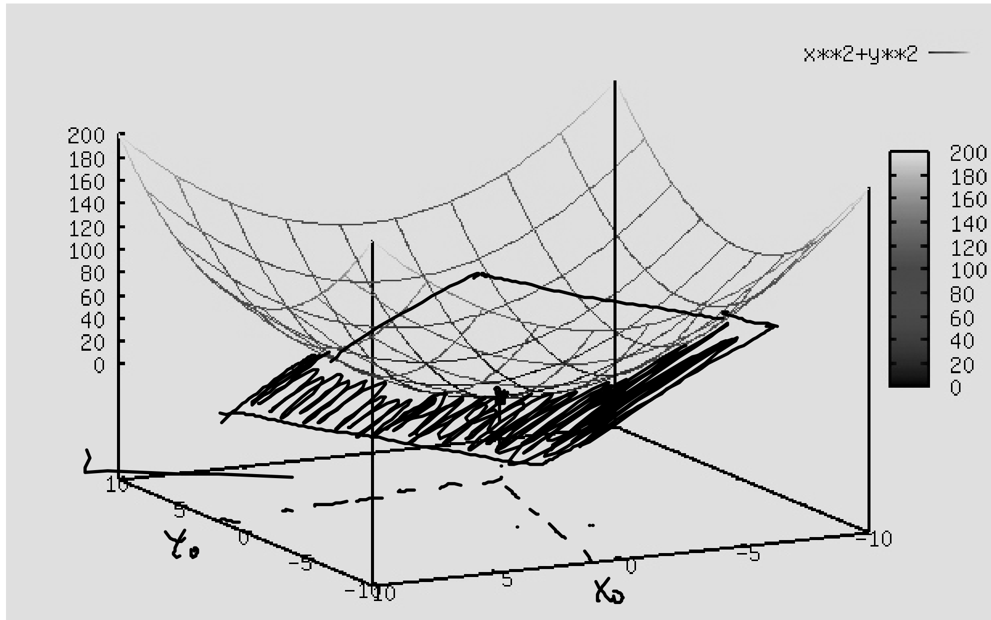
Anwendungen des totalen Differentials (= lineare Approximation)

letzte VL: $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + (\operatorname{grad} f)(x_0)^T (x - x_0)}$

analog für $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$



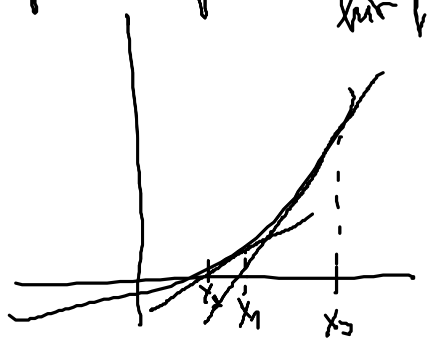


Tangentialebene

z.B. gut für Näherungsrechnung.

z.B. Newtonverfahren

für $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$



im Höherdimensionalen, d.h. z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Löse $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ nicht-lineares Gleichungssystem

nutze $\boxed{\text{obiges}}$ aus:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

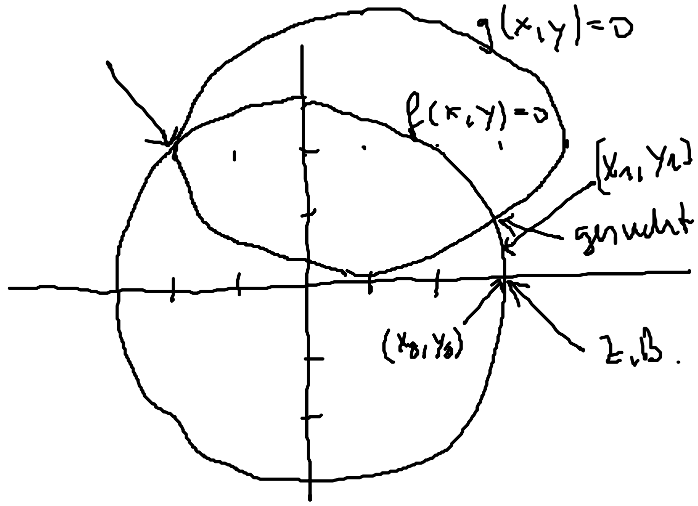
<u>Beispiel zum Newtonverfahren</u>

Kreis: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$

Ellipse: $g(x,y) = \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} - 1 = 0$

gesucht $f(x,y) = g(x,y)$, also Schnittpunkte, also gleichzeitige Nullstellen beider Gleichungen, also Lösung des Gleich.systems

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$



z.B. Startpunkt $(x_0, y_0) = (3,0)$
// willkürlich „in der Nähe" gewählt.

Benötigt: partielle Ableitungen

$$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = 2y$$
$$g_x(x,y) = \frac{2}{9}(x-1) \qquad g_y(x,y) = \frac{2}{4}(y-2)$$

1. Iteration: $(x_0, y_0) = (3,0)$

$$f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$
$$0 + 6\cdot(x-3) + 0\cdot(y-0) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 3$$

$$g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$
$$\frac{4}{9} + \frac{4}{9}(x-3) + \left(-\frac{4}{4}\right)\cdot(y-0) = 0 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{4}{9}$$

(nach Lösen dieses LGS)

2. Iteration $(x_1, y_1) = (3, \frac{4}{9})$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1,y_1) + f_x(x_1,y_1)\cdot(x-x_1) + f_y(x_1,y_1)(y-y_1) \\ \frac{16}{27} + 6\,(x-3) + \frac{8}{9}\,(y-\frac{4}{9}) = 0 \\ \text{ebenso für } g: \\ \left(\frac{4}{9} + \frac{49}{81} - 1\right) + \frac{4}{9}(x-3) - \frac{7}{9}\left(y-\frac{4}{9}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2{,}96091\ldots \\ y_2 = 0{,}4856 \end{array}$$

usw.

Abbruch, falls „Approximation"
$$\left.\begin{array}{l} f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) \\ g + g_x(x-x_0) + g_y(y-y_0) \end{array}\right\} \text{„nahe genug"}$$
an $\begin{cases} f \\ g \end{cases}$

Genauigkeit gibt man sich vor.

→ das kann man einen Computer machen lassen.

Beachte: Konvergenz hängt ab vom Startpunkt.

Richtungsableitung, Anstieg, Kettenregel

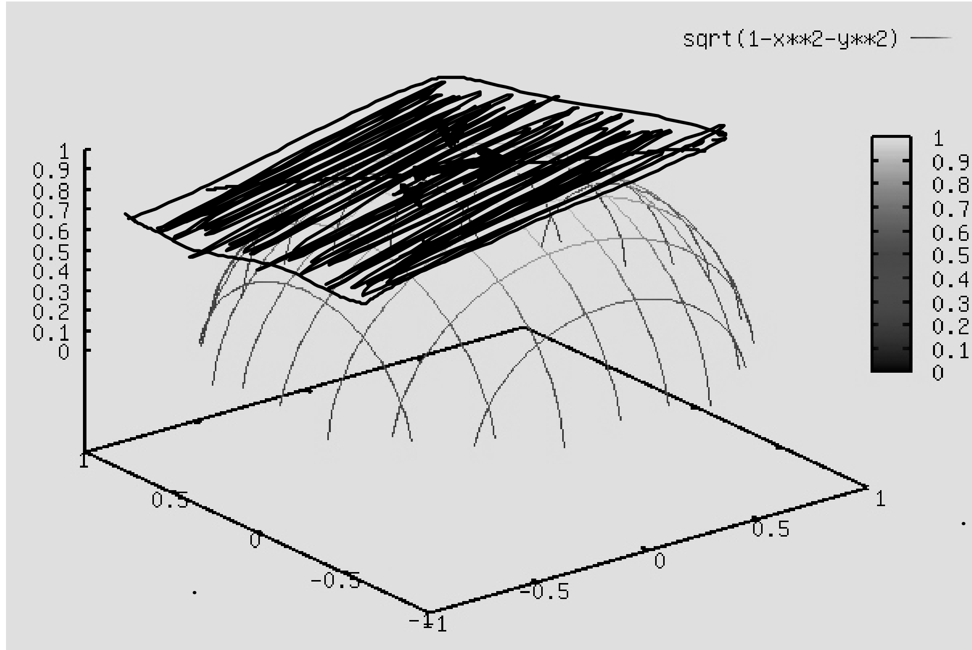
Definition

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ („Richtung"). Dann heißt der Grenzwert (falls er existiert)

$$\boxed{\partial_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cdot v) - f(x)}{t}}$$

die Ableitung von f in Richtung v an der Stelle x.

Falls $|v| = 1$, d.h. wenn v Einheitsvektor, dann heißt $\partial_v f(x)$ **Richtungsableitung**. (Anstieg)



speziell: Richtungsableitungen in Richtung der Achsen; d.h. $v = e_i$ (Einheitsvektoren)

$$\partial_v f(x) = f_{x_i}(x)$$ sind gerade die partiellen Ableitungen

// „Anstieg" nicht zufällig gewählt: Steigung der Tangente an f im Punkt x in Richtung v

// Gesamtheit aller Tangenten gibt Tangentialebene.

Bedeutung: $\partial_v f(x) > 0 \to f(x)$ nimmt in Richtung v zu

$\partial_v f(x) < 0 \to f(x)$ — " — ab.

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\boxed{\partial_v f(x) = (\operatorname{grad} f(x))^T \cdot v = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot v_i}$$

Skalarprodukt

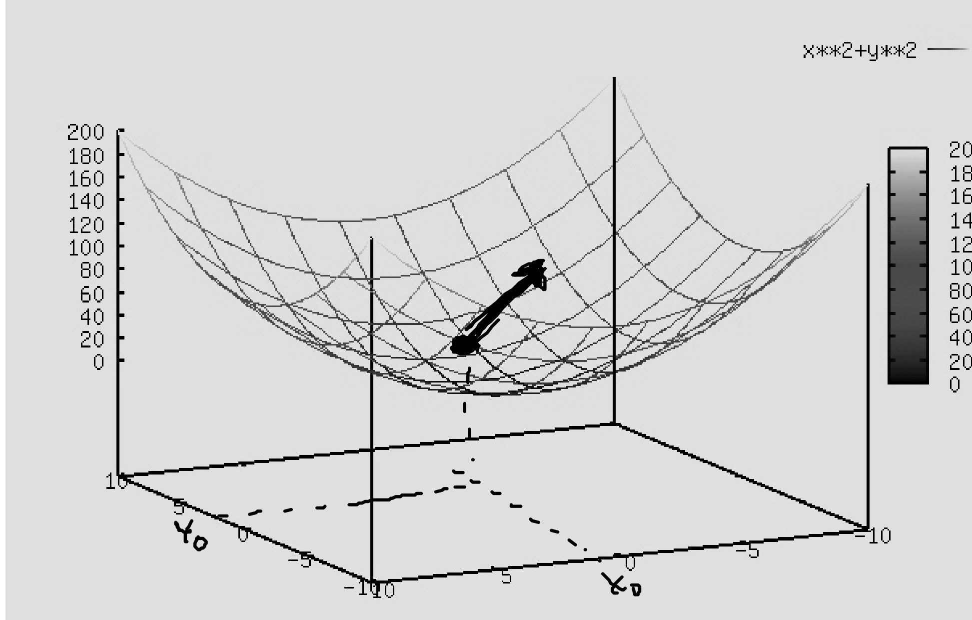
Beispiele

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$v = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$(x_0, y_0) = (1,1)$

$\text{grad}\, f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

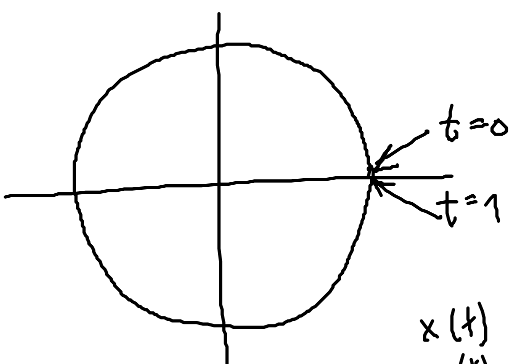


$\Rightarrow \partial_v f(x) = \left(\text{grad}\, f(1,1)\right)^T \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = (2,2) \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} =$

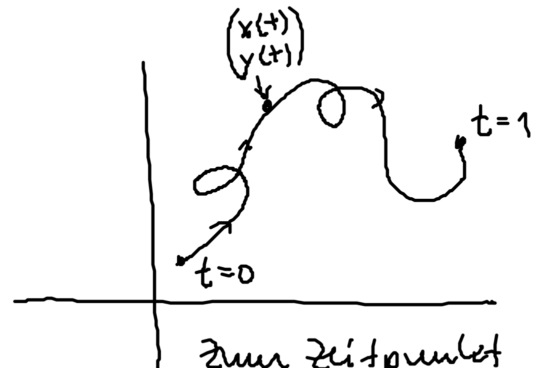
$2(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Erinnerung an Kurven

z.B.



$x(t) = \cos 2\pi t$
$y(t) = \sin 2\pi t$



Zum Zeitpunkt $t=0$ am Startpunkt, zum Zeitpunkt $t=1$ am Zielpunkt, zwischendurch beschreibt $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Punkt auf Kurve zum Ztpkt t.
„Parametrisierung“

Satz (Kettenregel)

Sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ (stetig diff'bar), $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und Kurve $x: \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to D$

$t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Dann gilt:

$$\boxed{f'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \left(\operatorname{grad} f(x(t))\right)^T \cdot \dot{x}(t)}$$

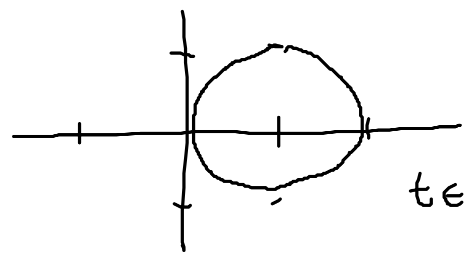
äußere Ableitung mal innere Ableitung

Ableitung von $x(t)$ nach t „$x'(t)$"

Beispiel

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



$t \in [0, 2\pi]$

$g(t) = f(x(t), y(t)) = (1 + \cos t)^2 + (\sin t)^2$

Funktionswert zum Zeitpunkt t

$g'(t) = \left(\operatorname{grad} f(x(t), y(t))\right)^T \cdot \dot{x}(t)$

Ableitung der Kurve nach t

Kurve nach t abgeleitet

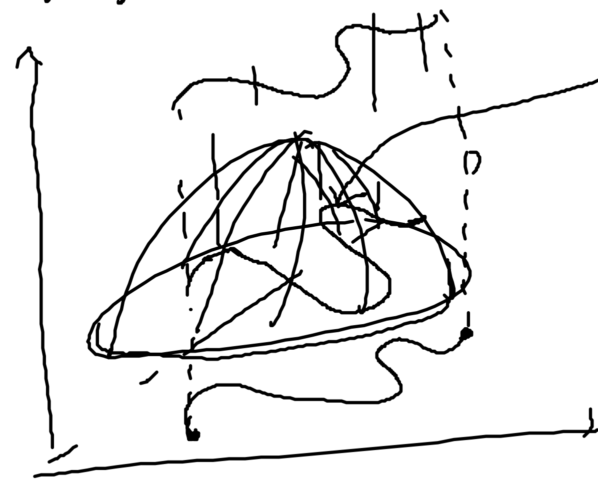
$$= \begin{pmatrix} 2(1 + \cos t) \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Gradient von f, partielle Ableitungen nach $x(t)$ und $y(t)$

$$= 2(1+\cos t)(-\sin t) + 2\sin t \cos t = -2\sin t.$$

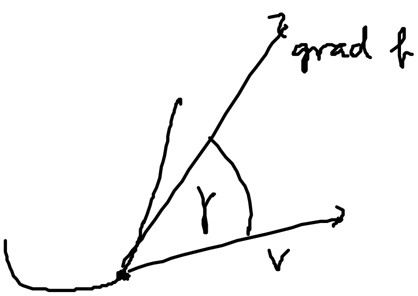
// das ist Steigung von f zum Zeitpunkt t



§2 Anwendungen der Differentiation

1. Richtung des stärksten Abstiegs

Für $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$, D offen, der <u>Anstieg</u> von f im Punkt $x \in D$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $|v|=1$ ist gegeben durch (s.o.)



$$D_v f(x) = (\operatorname{grad} f(x))^T \cdot v$$

$$= |\operatorname{grad} f(x)| \cdot |v| \cos\gamma$$

wobei γ eingeschlossener Winkel zwischen grad und v

$$= |\operatorname{grad} f(x)| \cdot \cos\gamma$$

In welcher Richtung ist der größte Anstieg? (oder Abstieg)
Passiert für $\cos\gamma = 1$, d.h. für $\gamma = 0$, d.h. in Richtung des Gradienten

$\Rightarrow$ Richtung von grad $f(x)$ = Richtung des maximalen Anstiegs von f in x

Entsprechend : $-\operatorname{grad} f(x)$ zeigt in Richtung des größten Abstiegs.