Gestern: Partielle Ableitungen:

$$f(x,y) = 4x^2 e^{y^3}$$

$$f_x = 2 \cdot 4 e^{y^3} \cdot x$$

$$f_y = 4x^2 \cdot 3y^2 e^{y^3}$$

$$f_{xy} = \underline{8x \cdot 3y^2 e^{y^3}}$$

$$f_{yx} = \underline{4 \cdot 2x \cdot 3y^2 e^{y^3}}$$

sind gleich

im Allg. ist das nicht unbedingt so.

Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Für jede Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\underbrace{f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})}_{\text{2x stetig diff'bar}}$

gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$$

// es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge partiell abgeleitet wird (wenn die 2. partiellen Abl. stetig sind)

gestern: Gradient von f

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

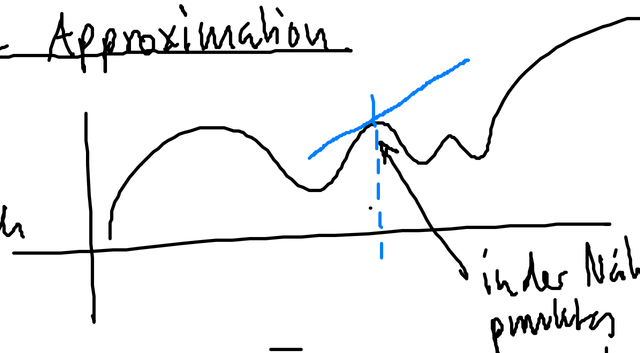
<u>Rechenregeln</u>

1. $\operatorname{grad}(f_1 + f_2) = \operatorname{grad}(f_1) + \operatorname{grad}(f_2)$ // Summenregel

2. $\operatorname{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_2 \operatorname{grad}(f_1) + f_1 \operatorname{grad}(f_2)$ // Produktregel

Totale Ableitung und lineare Approximation

letztes Semester:
Annäherung einer Funktion durch Tangente
jetzt: analog



in der Nähe des Berührpunktes stimmt die Tangente fast mit der Funktion überein

Definition der o-Notation //technisch

Für zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, $k \in \mathbb{N}$

Schreibt man

$$\boxed{f(x) = g(x) + o\left(|x-x_0|^k\right)} \quad (\text{für } x \to x_0)$$

bezeichnet den Fehler, d.h. den Abstand von g zu f, wenn ich mich vom Berührpunkt x_0 entferne

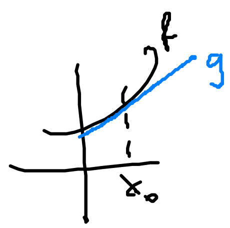
falls $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x-x_0|^k} = 0$$

In Worten: Die Differenz zwischen f und g geht für $x \to x_0$ mit der Ordnung k gegen Null

// d.h. wird schneller klein als x^k

<u>Beispiel</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



in x_0 diff'bar, dann gilt $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

// Tangentengleichung

<u>Bsp.</u> $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

weil: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x-x_0|^1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{|x-x_0|}}_{\to f'(x_0)} - \cancel{\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}} = 0$$

$\Rightarrow$ Tangente ist <u>lineare</u> Approximation an f.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D$ <u>total differenzierbar</u> (oder <u>linear approximierbar</u>), wenn es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$(*) \qquad \boxed{f(x) = f(x_0) + \underset{\text{„Ableitung"}}{a^T}(x - x_0) + \underbrace{o(|x - x_0|)}_{\text{linearer Fehler}}}$$

für x nahe x_0.

Satz

Ist f in x_0 total differenzierbar, dann gilt

1. f ist in x_0 stetig   // kann ich eine Tangente in x_0 anlegen, kann in x_0 kein Sprung sein

2. $$\lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}}_{\text{Differenzenquotient}} = a^T v \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

3. f ist partiell differenzierbar und $a = (\operatorname{grad} f)(x_0)$

Damit lässt sich obige Gleichung (*) schreiben als

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (\operatorname{grad} f)(x_0)^T (x - x_0) + o(|x - x_0|)}$$

Geometrische Interpretation:

Definition Die Ebene gegeben durch

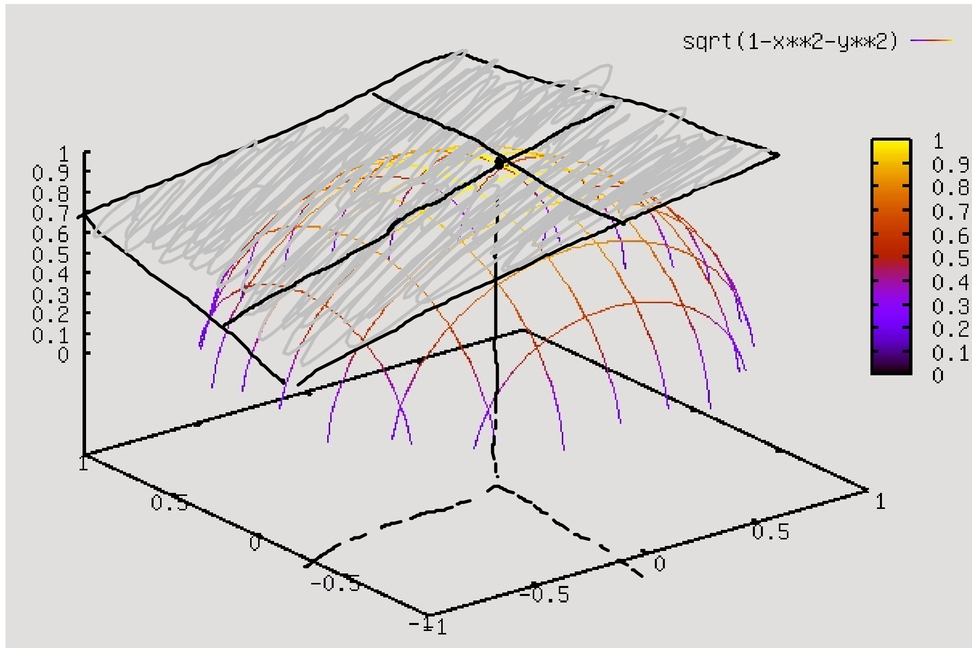
$$z = f(x_0) + (\operatorname{grad} f)(x_0)^T (x - x_0)$$

heißt **Tangentialebene** (im $\mathbb{R}^1$: Tangente) der Fläche $z = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Der Fehler beträgt

$$o(|x - x_0|) =$$

$$o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$



Achtung:

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, d.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht totale Differenzierbarkeit

// die Tatsache, dass partielle Ableitungen gebildet werden können, bedeutet noch nicht, dass man eine Tangentialebene anlegen kann.

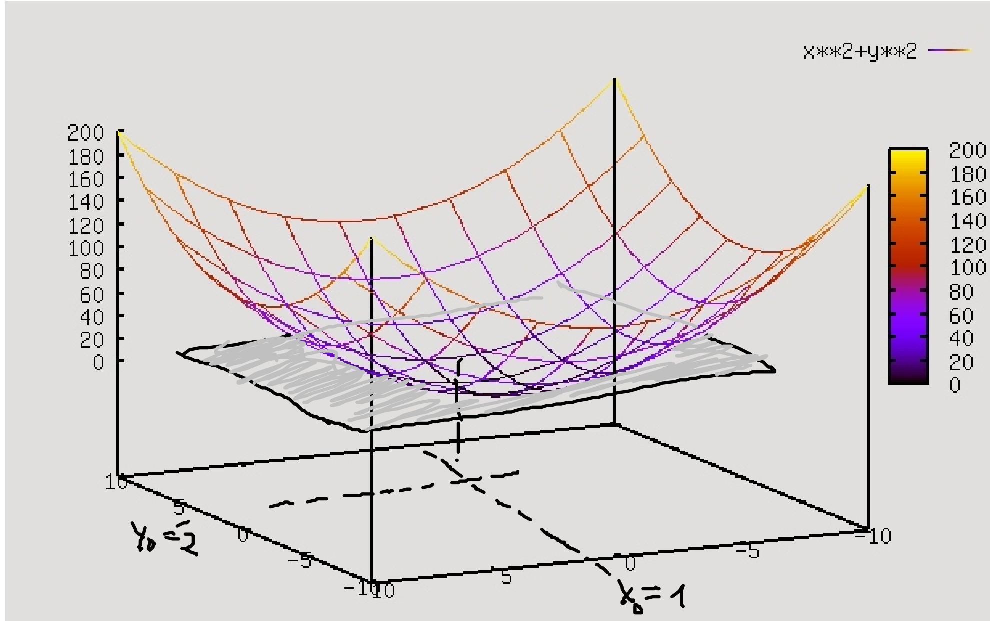
Satz

Ist $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, // sind alle partiellen Ableitungen stetig

dann ist f total diff'bar // d.h. dann ex. Tangentialebene

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



Tangentialebene an

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{grad} f)(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\to$ Tangentialebenengleichung $\quad f(x_0) + (\operatorname{grad} f)(x_0)^T (x - x_0)$

$$5 + (2,4)^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Einfache Anwendungen

1. Näherungsrechnung

Für einfache Näherungsrechnungen ersetze $f(x)$ in der Nähe von x_0 durch

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funktion}} \approx \underbrace{f(x_0) + (\operatorname{grad} f)(x_0)^T (x - x_0)}_{\text{Tangentialebene}}$$

Beispiel

$$f(x,y) = x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gradient: $$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} y\,x^{y-1} \\ \ln x \cdot \underbrace{e^{y \ln x}}_{x^y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y x^{y-1} \\ (\ln x) \cdot x^y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) \approx \underbrace{1^3}_{f(x_0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \cdot 1^{3-1} \\ (\ln 1) \cdot 1^3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]}_{\text{Vektor}}$$

Skalarprodukt

$$= 1 + 3 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-3)$$

$$= 1 + 3 \cdot (x-1)$$

z.B. $\left.\begin{array}{l} x = 1{,}02 \\ y = 3{,}01 \end{array}\right\}$ ist „nah" bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

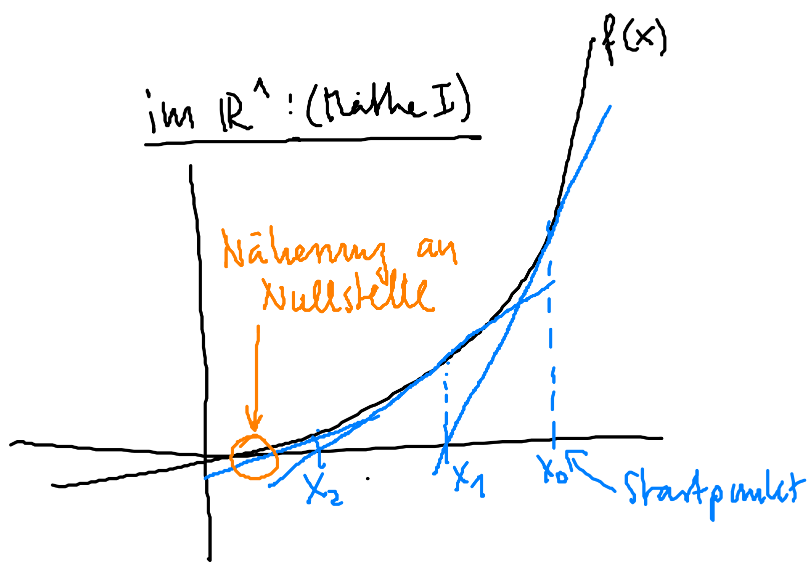
$$f(x,y) = x^y = 1{,}02^{3{,}01} = 1 + 3 \cdot (1{,}02 - 1) = 1{,}06 \qquad \text{Näherung}$$

genauer Wert $1{,}02^{3{,}01} = 1{,}06141816\ldots$

2. Newtonverfahren

zur näherungsweisen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems im $\mathbb{R}^2$

im $\mathbb{R}^1$: (Mathe I)



$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

Wähle Startpunkt (x_0, y_0) und löse // Tangentialebenen

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{rechte Seite}} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)}_{\text{Gradient von } f}(y-y_0) \overset{!}{=} 0$$

$$g(x,y) \approx \underbrace{g(x_0,y_0)}_{\text{rechte Seite}} + \underbrace{g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)}_{\text{Gradient von } g}(y-y_0) \overset{!}{=} 0$$

setze $x - x_0 =: \Delta x$
$y - y_0 =: \Delta y$

ist linearer Gleichungssystem in $\Delta x, \Delta y$

und hat eine eindeutige Lösung, falls

$$\gamma := \det \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

z.B. mit Cramers Regel:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \det \begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ \underbrace{-g(x_0,y_0)}_{\text{rechte Seite}} & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\Delta y = \frac{1}{\gamma} \det \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & -f(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & \underbrace{-g(x_0,y_0)}_{\text{rechte Seite}} \end{pmatrix}$$

setze $x_1 = x_0 + \Delta x$
$y_1 = y_0 + \Delta y$

und wiederhole das Verfahren mit (x_1, y_1), solange bis $f(x_k, y_k)$ und $g(x_k, y_k)$ „nahe genug" bei Null.

Beispiel: Bahge Ellipse und Kreis zum Schnitt
(nächstes Mal)