

Gestern: Partielle Ableitungen:

$$f(x, y) = 4x^2 e^{y^3}$$

$$f_x = 2 \cdot 4e^{y^3} \cdot x$$

$$f_y = 4x^2 \cdot 3y^2 e^{y^3}$$

$$f_{xy} = \frac{8x \cdot 3y^2 e^{y^3}}{4 \cdot 2x \cdot 3y^2 e^{y^3}}$$

sind gleich

in Alg. ist das nicht
unbedingt so.

The poster features a large globe graphic in the background. In the top right corner, there is a logo for "TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT" featuring a profile of a head. The text "studieren weltweit" is above the globe. The main title "International Day" is centered in bold letters. Below it, the date "am 10.06.2010" and time "ab 9.00 Uhr" are given, along with the location "karo 5 lounge". A list of events includes: "Messe mit Informationsständen zum Auslandsstudium an unseren Partnerhochschulen", "„Go Out!“-Mobil auf dem Karolinenplatz", "Vorträge rund um das Thema Auslandserfahrung im Studium", and "interessantes Rahmenprogramm". Logos for "Bundesministerium für Bildung und Forschung" and "DAAD Deutscher Akademischer Austausch Dienst" are at the bottom left. The bottom right contains the text "Referat Internationale Beziehungen der TU Darmstadt" and the website "www.go-out.de".

Satz von Schwarz über die Ver tauschbarkeit partieller Ableitungen

Für jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$

gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}$$

2x stetig diff'bar

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge partiell abgelebt wird (wenn die 2.-partiellen Ableit. stetig sind)

gestern: Gradient von f

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Rechenregeln

1. $\text{grad}(f_1 + f_2) = \text{grad}(f_1) + \text{grad}(f_2)$ // Summenregel

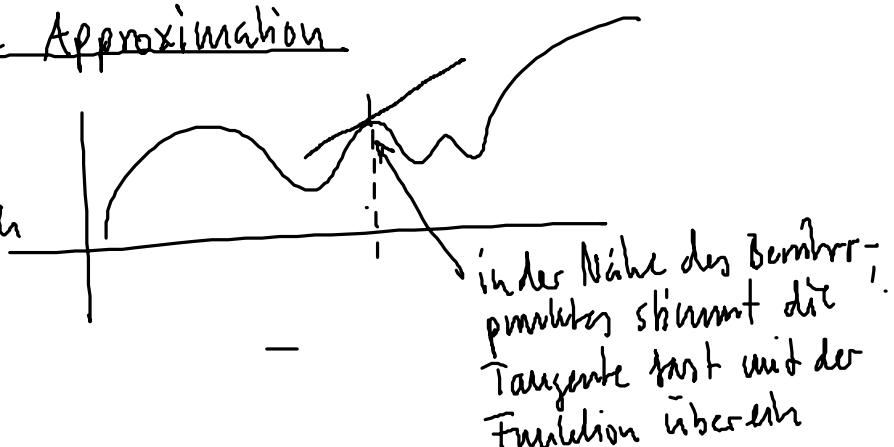
2. $\text{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_2 \text{grad}(f_1) + f_1 \text{grad}(f_2)$ // Produktregel

Totale Ableitung und lineare Approximation

letztes Semester:

Annäherung einer Funktion durch Tangente

jetzt: analog



Definition der o-Notation // technisch

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D, k \in \mathbb{N}$

schreibt man

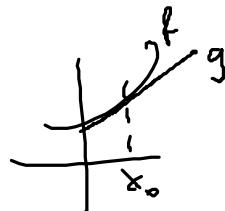
$$f(x) = g(x) + o(|x-x_0|^k) \quad (\text{für } x \rightarrow x_0)$$

Falls $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x-x_0|^k} = 0$ bezeichnet den Fehler, d.h. den Abstand von g zu f , wenn ich mich vom Berührpunkt x_0 entferne

In Wörtern: Die Differenz zwischen f und g geht für $x \rightarrow x_0$ mit der Ordnung k gegen Null
// d.h. wird schneller kleiner als x^k

Beispiel

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



in x_0 diff'bar, dann gilt $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
// Tangentengleichung

Bew. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

weil: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x-x_0|^1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{|x-x_0|}}_{\rightarrow f'(x_0)} - \underbrace{\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}}_{f'(x_0)} = 0$$

⇒ Tangente ist lineare Approximation an f .

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D$ total differenzierbar (oder linear approximierbar), wenn es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

(*)

$$f(x) = f(x_0) + a^T (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

„Ableitung“ linearer Fehler

für x nahe x_0 .

Satz

Ist f in x_0 total differenzierbar, dann gilt

1. f ist in x_0 stetig // kann ich eine Tangente in x_0 anlegen, wenn x_0 kein Sprung sei?

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t} = a^T v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$\underbrace{\phantom{\frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}}}_{\text{Differenzenquotient}}$

3. f ist partiell differenzierbar und $a = (\text{grad } f)(x_0)$

Damit lässt sich obige Gleichung (*) schreiben als

$$f(x) = f(x_0) + (\text{grad } f)(x_0)^T (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Geometrische Interpretation:

Definition Die Ebene gegeben durch

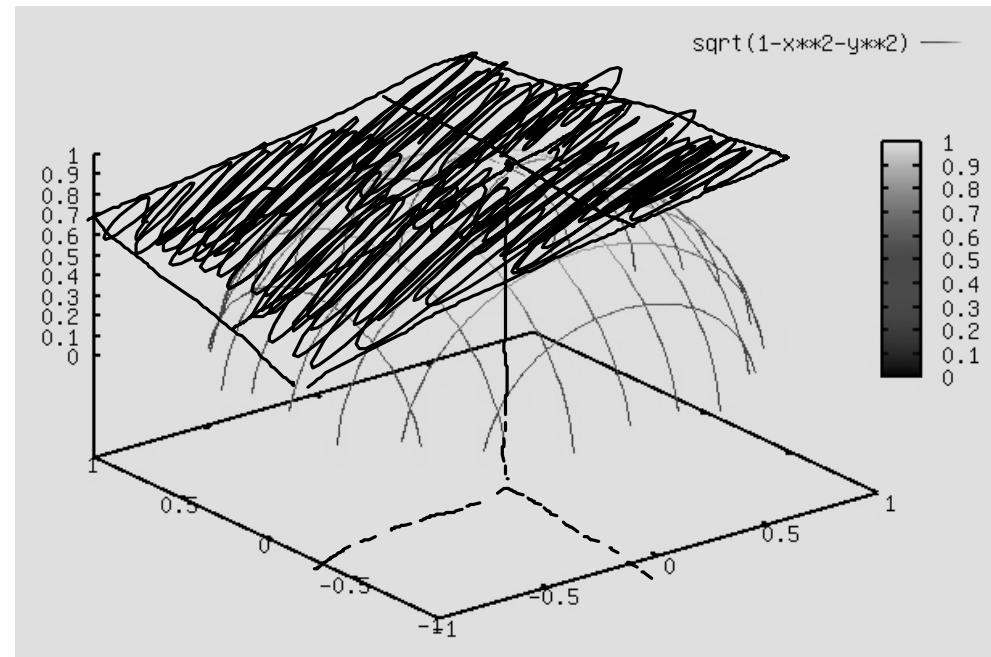
$$z = f(x_0) + (\text{grad } f)(x_0)^T (x - x_0)$$

heißt Tangentialebene (im \mathbb{R}^n : Tangente) der Fläche

$$z = f(x) \text{ im Punkt } (x_0, f(x_0))$$

Der Fehler
beträgt

$$\begin{aligned} o(|x - x_0|) &= \\ o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \end{aligned}$$



Achtung:

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, d.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht totale Differenzierbarkeit

/ die Tatsache, dass partielle Ableitungen gebildet werden können, bedeutet noch nicht, dass man eine Tangentialebene anlegen kann.

Satz

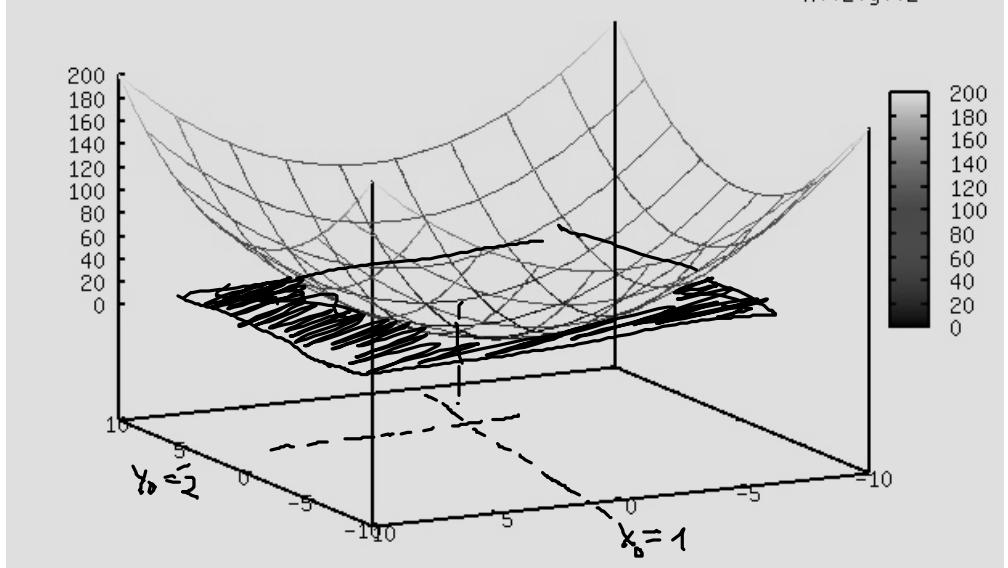
Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, // sind alle partiellen Ableitungen stetig
dann ist f total diff'bar // d.h. dann ex. Tangential ebene

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Tangentialebene an

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$(\text{grad } f)(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Tangentialebenengleichung} \quad f(x_0) + (\text{grad } f)(x_0)^T (x - x_0)$$

$$5 + (2, 4)^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Einfache Anwendungen

1. Näherungsrechnung

Für einfache Näherungsrechnungen ersetze $f(x)$ in der Nähe von x_0 durch

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funktion}} \approx \underbrace{f(x_0) + (\text{grad } f)(x_0)^T (x - x_0)}_{\text{Tangentialebene}}$$

Beispiel

$$f(x, y) = x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient: } \text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} y x^{y-1} \\ \ln x \cdot e^{y \ln x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y x^{y-1} \\ (\ln x) x^y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \cdot 1^{3-1} \\ (\ln 1) \cdot 1^3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (x) - (1) \\ (y) - (3) \end{pmatrix}}_{\text{Vektor Skalarprodukt}} \\ &= 1 + 3 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-3) \\ &= 1 + 3 \cdot (x-1) \end{aligned}$$

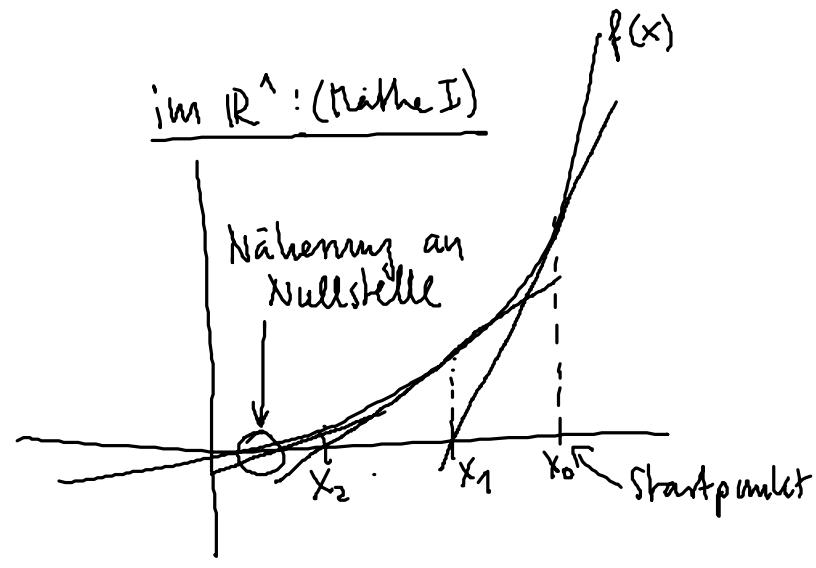
z.B. $\begin{cases} x = 1,02 \\ y = 3,01 \end{cases}$ ist „nah“ bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$f(x, y) = x^y = \frac{1,02^{3,01}}{\text{genauer Wert } 1,02^{3,01}} = \frac{1+3 \cdot (1,02-1)}{1,061418168\dots} = 1,06 \quad \text{Näherung}$$

2. Newtonverfahren

zur Näherungsweisen Lösung
eines nichtlinearen Gleichungs-
systems im \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$



Wähle Startpunkt (x_0, y_0) und löse // Tangentialebenen

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{rechte Seite}} + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{Gradient von } f} = 0$$

$$g(x, y) \approx \underbrace{g(x_0, y_0)}_{\text{rechte Seite}} + \underbrace{g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{Gradient von } g} = 0$$

setze $x - x_0 =: \Delta x$
 $y - y_0 =: \Delta y$

↑
 ist lineares Gleichungssystem
 in $\Delta x, \Delta y$

und hat eine eindeutige Lösung, falls

$$\gamma := \det \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

z.B. mit Cramers Regel:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \det \begin{pmatrix} -f(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

rechte Seite

$$\Delta y = \frac{1}{\gamma} \det \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & -f(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & -g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

rechte Seite

setze $x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

und wiederhole das Verfahren mit (x_n, y_n) , solange bis
 $f(x_k, y_k)$ und $g(x_k, y_k)$ "nahe genug" bei Null.

Beispiel : Bringe Ellipse und Kreis zum Schrift
(nächster mal)