Thema: „Mathe I im $\mathbb{R}^n$"

§1 Reellwertige Funktionen mehrerer Variablen

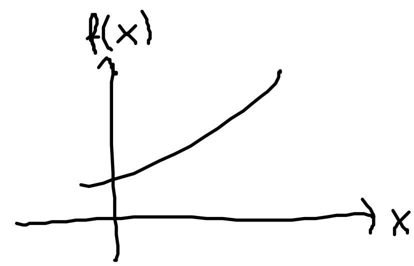
Wir betrachten

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^n \supseteq D}_{} \longrightarrow \mathbb{R}$$

D ist Def.bereich von f und Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

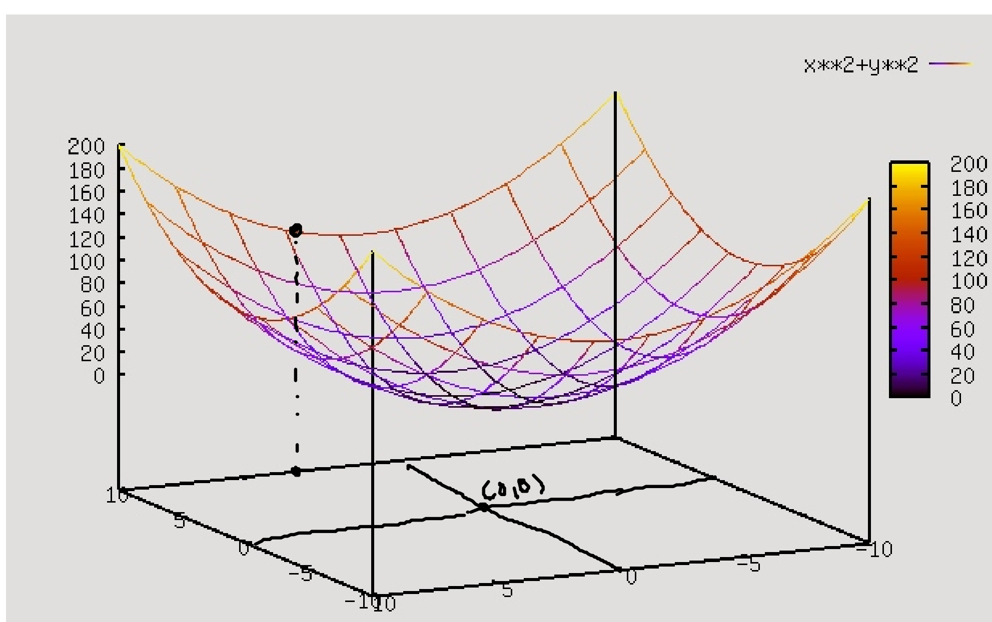
$$G_f = \{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))^T \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \}$$

heißt Graph von f



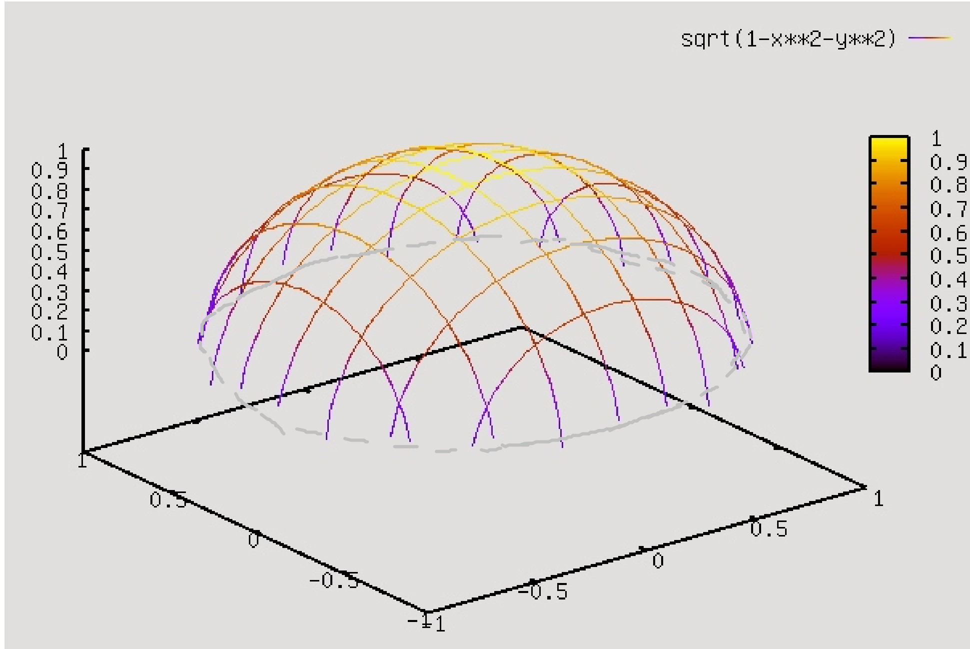
Beispiele für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

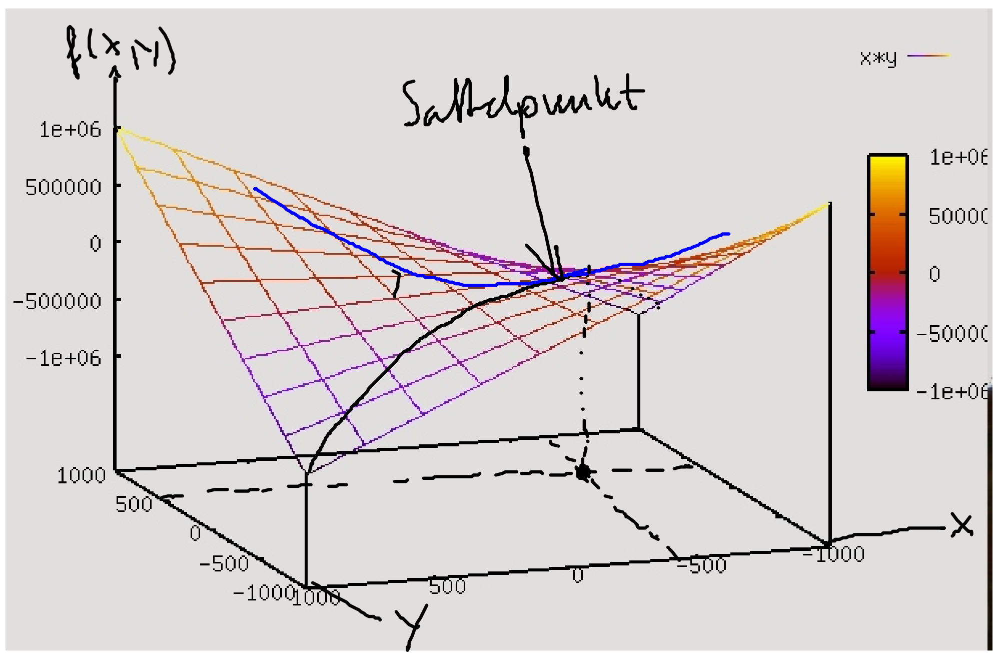


2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

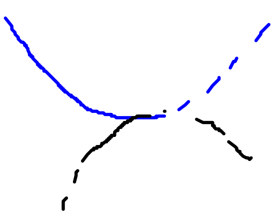
Halbkugel



3. $f(x,y) = xy$



ähnlich zu
$f(x) = x^2$
und
$f(y) = -y^2$

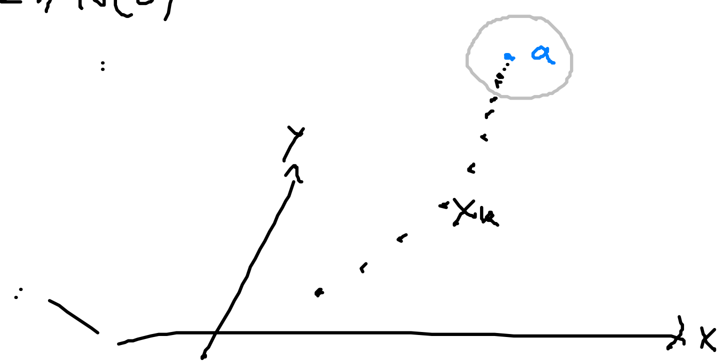


z.B. $f(-500, 500) = 250000$

Definition

a) Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, falls es zu jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|x_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$

In Zeichen $\boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = a}$



b) Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ und $a \in D \cup \underbrace{\partial D}_{\text{Rand von } D}$

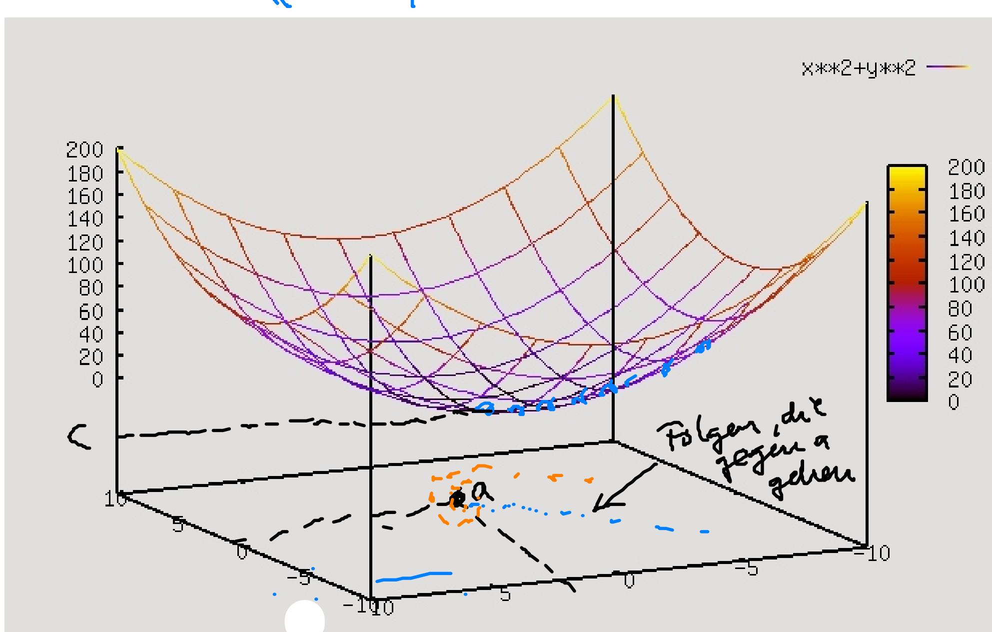
f hat in a den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, in Zeichen $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = c}$

falls für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$

gilt, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = c$

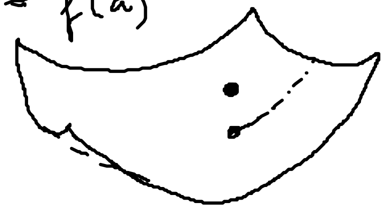
$x_k \in \mathbb{R}^n$, d.h. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Alternative Definition:
Falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $r(\varepsilon)$-Umgebung $U_{r(\varepsilon)}$ gibt, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{\varepsilon(r)} \cap D$.



Im Worten: Egal, wie ich mich der Stelle a annähere, die Funktionswerte gehen immer gegen c.

c) f heißt <u>stetig in a</u>, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



// keine Löcher, Sprünge, usw

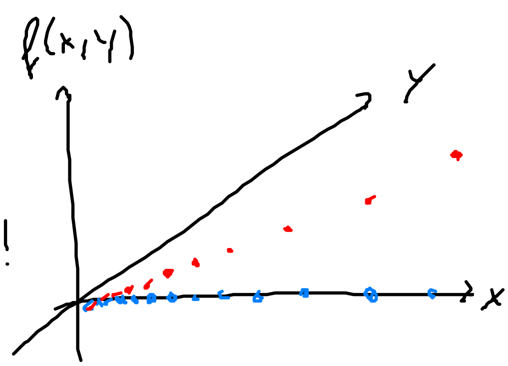
d) f heißt <u>stetig</u>, falls sie für alle $x \in D$ stetig ist

<u>Beispiele</u>

1. $f(x,y)$ // $f(x_1, x_2)$
$= x^2 + y^2$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}^2$ // s. Bild oben

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\binom{0}{0}$, denn



- für $x_k = (\frac{1}{k}, 0)$ gilt
$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = 0$ // hilft nichts!

- für $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt
$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$
$\to f$ nicht stetig in $(0,0)$

<u>Eigenschaften stetiger Funktionen</u>

1. Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig
2. Ist f stetig und $f(a) > 0$, dann gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(a)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$

// wenn f positiv ist in a, dann auch „in der Nähe" von a

Definition

a) Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>beschränkt</u>, falls es eine Konstante $K > 0$ gibt mit $|x| < K$ für alle $x \in D$.

// in keiner Koordinate beliebig groß

b) Eine Menge, die abgeschlossen und beschränkt ist, heißt <u>kompakt</u>.

Satz vom Minimum und Maximum

Jede auf einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>stetige</u> Funktion nimmt auf D Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $a, b \in D$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Niveaulinie

Definition

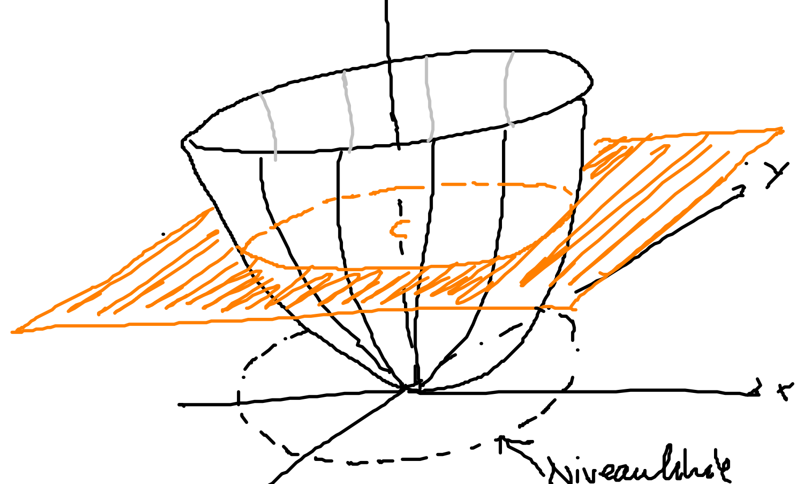
Wertebereich von f

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ und $c \in W_f$ heißt

$N_c = \left\{ \binom{x}{y} \in D \;\middle|\; f(x,y) = c \right\}$ heißt Niveaulinie von f zum Wert c

/ allgemeiner $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ „Niveaufläche"

$\uparrow f(x,y)$

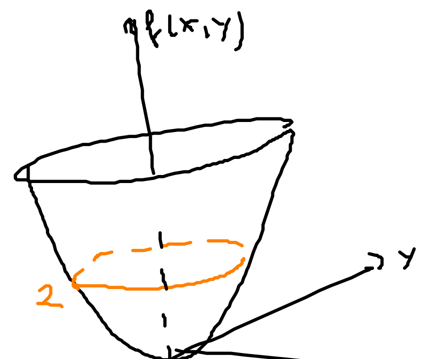


das sind die (x,y)-Punkte, bei denen der Funktionswert c ist.

Bekannt aus topographischen Karten „Höhenlinie"

Anderes Beispiel: Isobaren in der Wetterkarte etc.

Beispiele



1. $f(x,y) = x^2+y^2$, $c=2$

$$\Rightarrow N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=2 \right\}$$

ist Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um Ursprung

2. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $c=4$

$$\Rightarrow N_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=4 \right\}$$

Kugel um den Ursprung mit Radius 2

Isolinien / Höhenlinien / Niveaulinien dienen z.B. der zweidim. Veranschaulichung dreidim. Objekte / Flächen.

Partielle Ableitungen, Gradient

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$.
Dann heißt f an der Stelle a partiell nach x_i differenzierbar,

teilweise   eine der n Variablen

wenn die partielle Funktion $g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$
an der Stelle $x_i = a_i$ differenzierbar ist.

In Zeichen:

i-ter Einheitsvektor

$$\boxed{f_{x_i}(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = g'(a_i) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} \right)}$$

heißt partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle a.

f heißt (stetig) partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen f_{x_i} existieren (und stetig sind).

Beispiel

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

   partielle Ableitungen: nach x: $f_x = 2x$ // y ist konstant

   nach y: $f_y = 2y$ // x konstant

   ist stetig partiell diff'bar

2. $f(x,y) = xy$ $f_x = y$, $f_y = x$

   ist stetig partiell diff'bar

Definition

Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient von f.

Beispiel

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

2. $f(x,y,z) = e^{x-2y} + 2y \sin z + z^2 x^2 y$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-2y} + 2z^2 y x \\ -2e^{x-2y} + 2\sin z + z^2 x^2 \\ 2y\cos z + 2x^2 y z \end{pmatrix}$$

Der Gradient gibt später „nützliche" Informationen

Definition

f heißt zweimal (k-mal) partiell differenzierbar, falls alle zweiten (k-ten) partiellen Ableitungen

$$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

existieren. Sind alle partiellen Ableitungen stetig, so heißt f zweimal (k-mal) <u>stetig partiell diff'bar</u>.

In Zeichen

$$\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R}) := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist k-mal stetig partiell diff'bar} \}$$

$$\mathcal{C}^0(D,\mathbb{R}) := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$$

<u>Beispiel</u>

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad f_x = 2x \qquad f_y = 2y$

$$f_{xx} = 2 \qquad \underbrace{f_{xy} = 0 \qquad f_{yx} = 0} \qquad f_{yy} = 2$$

<u>Beachte</u>: im Allgemeinen ist f_{xy} nicht unbedingt gleich f_{yx}.