

Thema: Mathe I im \mathbb{R}^n

"

§1 Reellwertige Funktionen mehrerer Variablen

Wir betrachten

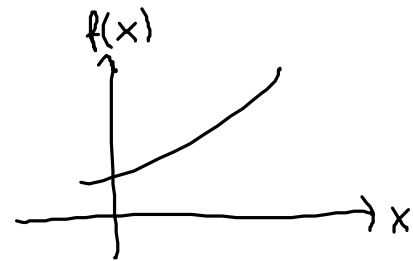
$$f: \underbrace{\mathbb{R}^n \supseteq D} \rightarrow \mathbb{R}$$

D ist Def. bereich
von f und Teilmenge
von \mathbb{R}^n



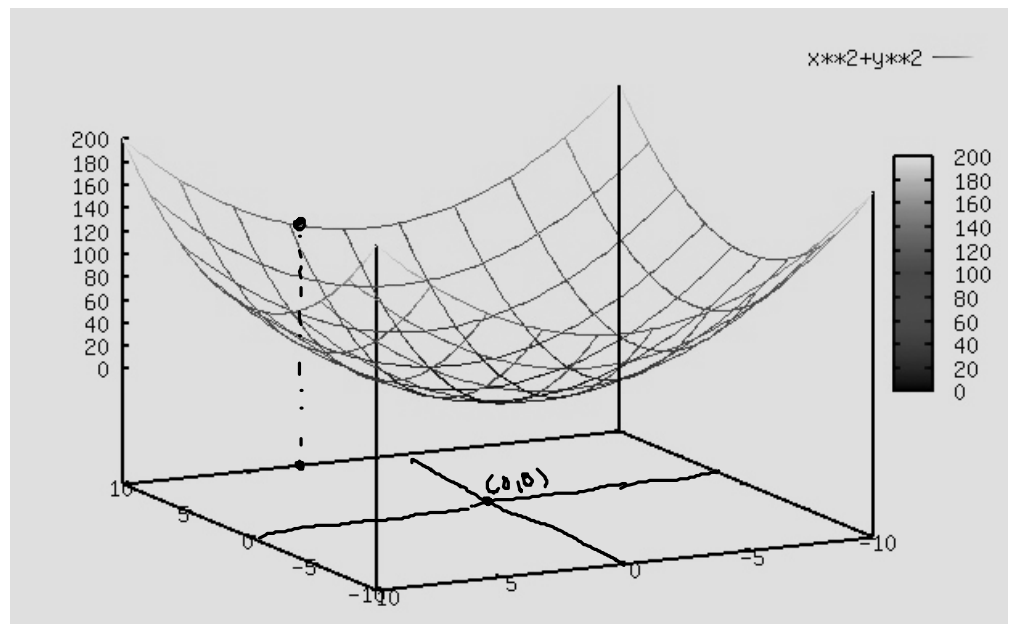
$$G_f = \{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))^T \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \}$$

heißt Graph von f



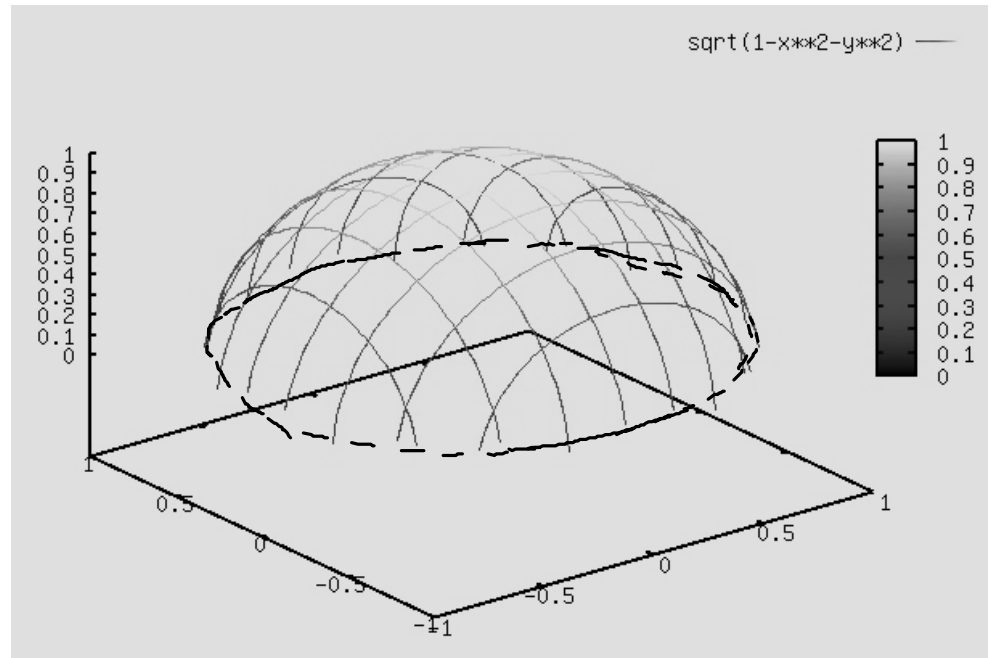
Beispiele für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$



$$2. f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

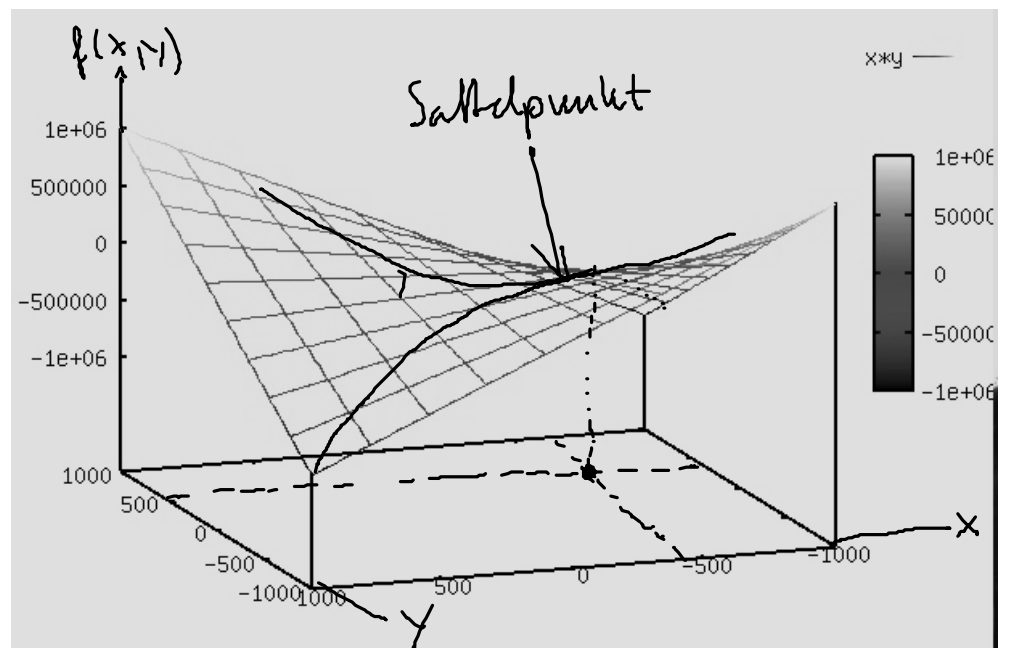
Halbkugel



$$3. f(x, y) = xy$$

Ähnlich zu
 $f(x) = x^2$

und
 $f(y) = -y^2$



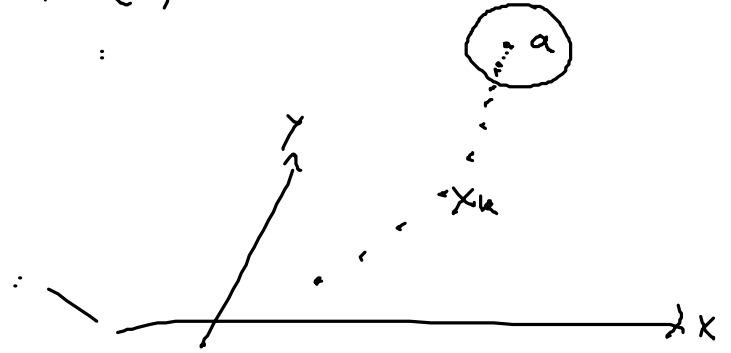
z.B. $f(-500, 500) = 250000$

Definition

a) Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergiert mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, falls es zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|x_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$

In Zeichen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$



b) Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D \cup \partial D$,
Rand von D

f hat in a den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

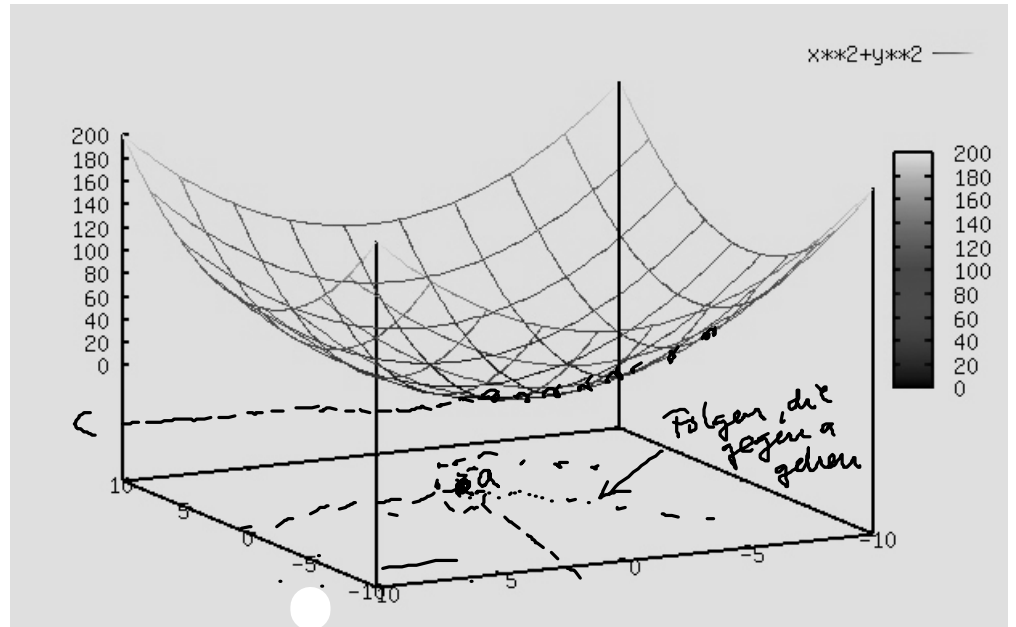
falls für alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$

gilt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = c$

$x_k \in \mathbb{R}^n$, d.h. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

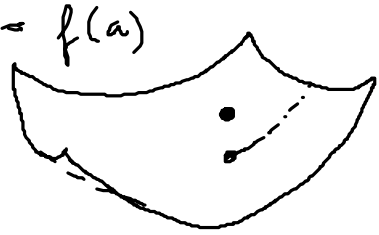
Alternative Definition:

Falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $r(\varepsilon)$ -Umgebung $U_{r(\varepsilon)}$ gibt, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{r(\varepsilon)} \cap D$.



In Worten: Egal, wie ich mich der Stelle a annähere, die Funktionswerte gehen immer gegen c .

c) f heißt stetig in a , falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



Keine Lücke, Sprünge, usw

d) f heiſst stetig, falls sie für alle $x \in D$ stetig ist

Beispiele

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ // $f(x_1, x_2)$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}^2$ // s. Bild oben

2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

ist nicht stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn

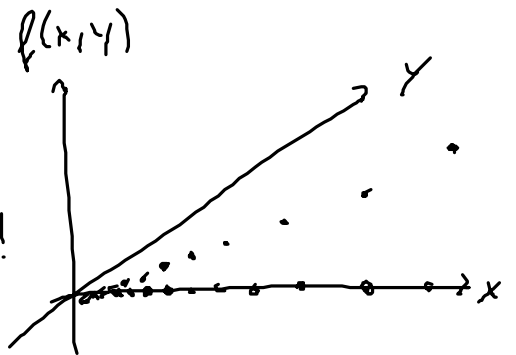
- für $x_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0 \quad \text{// hilft nichts!}$$

- für $x_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0$$

$\rightarrow f$ nicht stetig in $(0, 0)$



Eigenschaften stetiger Funktionen

1. Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig
2. Ist f stetig und $f(a) > 0$, dann gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(a)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$
 // wenn f positiv ist in a , dann auch „in der Nähe“ von a

Definition

- a) Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $K > 0$ gibt mit $|x| < K$ für alle $x \in D$.

// in keiner Koordinate beliebig groß

- b) Eine Menge, die abgeschlossen und beschränkt ist, heißt Kompakt.

Satz vom Minimum und Maximum

Jede auf einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetige Funktion nimmt auf D Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $a, b \in D$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Niveaulinie

Definition

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in W_f$ heißt

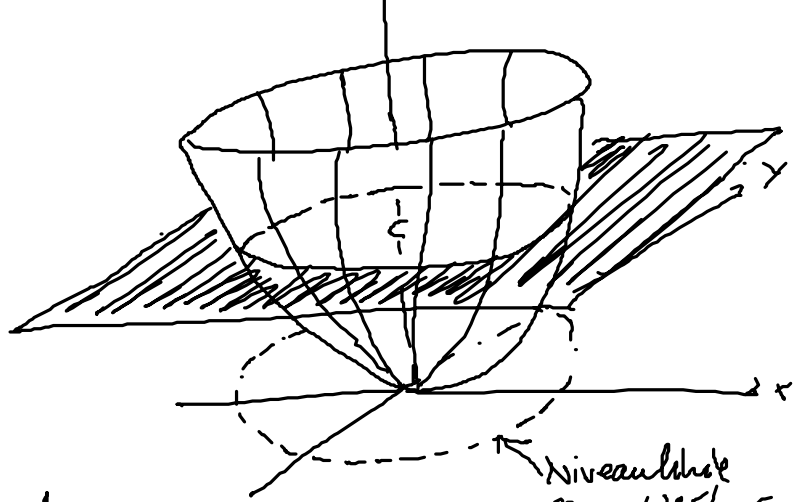
$N_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \mid f(x, y) = c \right\}$ heißt Niveaulinie von f zum Wert c

// allgemeiner $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ „Niveaupläche“

↑ $f(x, y)$

Wertebereich von f

Bekannt aus topographischen Karten
 „Höhenlinie“



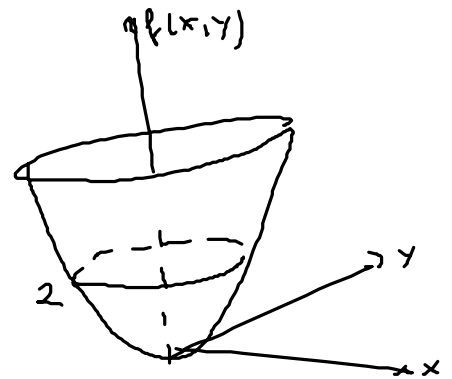
Niveaulinie zum Wert c
 das sind die (x,y) -Punkte,
 bei denen der Funktionswert c ist.

Anderes Beispiel: Isobaren in der Wetterkarte etc.

Beispiele

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c=2$

$\Rightarrow N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2 \right\}$
 ist Kreis mit Radius $\sqrt{2}$
 um Ursprung



2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c=4$

$\Rightarrow N_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \right\}$

Kugel um den Ursprung mit Radius 2

Isolinien / Höhenlinien / Niveaulinien dienen meist der zweidim.
 Veranschaulichung dreidim. Objekte / Flächen.

Partielle Ableitungen, Gradient

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$.

Dann heißt f an der Stelle a partiell nach x_i differenzierbar,

↖ teilweise ↗ eine der n Variablen

wenn die partielle Funktion $g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$
an der Stelle $x_i = a_i$ differenzierbar ist.

In Zeichen:

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} \right)$$

i -ter Einheitsvektor

heißt partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle a .

f heißt (stetig) partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen f_{x_i} existieren (und stetig sind)

Beispiel

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

partielle Ableitungen: nach x : $f_x = 2x$ // y ist konstant

nach y : $f_y = 2y$ // x konstant

ist stetig partiell diff'bar

2. $f(x, y) = xy$ $f_x = y$, $f_y = x$

ist stetig partiell diff'bar

Definition

Der Vektor

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient von f .

Beispiel

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

2. $f(x, y, z) = e^{x-2y} + 2y \sin z + z^2 x^2 y$

$$\Rightarrow \text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-2y} + 2z^2 y x \\ -2e^{x-2y} + 2 \sin z + z^2 x^2 \\ 2y \cos z + 2x^2 y z \end{pmatrix}$$

Der Gradient gibt später "nützliche" Informationen

Definition

f heißt zweimal (k-mal) partiell differenzierbar, falls alle zweiten (k-ten) partiellen Ableitungen

$$f_{x_i x_j} = (f_{x_j})_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

existieren. Sind alle partiellen Ableitungen stetig, so heißt f zweimal (k -mal) stetig partiell diff'bar.

in Zeichen

$$\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}) := \{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell diff'bar}\}$$

$$\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) := \{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_x = 2x$$

$$f_y = 2y$$

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = 0$$

$$f_{yy} = 2$$

$$\underbrace{f_{xy} = 0 \quad f_{yx} = 0}$$

Beachte: im Allgemeinen ist f_{xy} nicht unbedingt gleich f_{yx} .