Wdh. quadratische Formen

$Q(x) = x^T A x$ liefert für jedes $x$ eine Zahl.

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + \underbrace{2x_1x_2 + 2x_1x_2}_{\text{falls keine gemischten Terme, dann heißt quadrat. Form rein.}} + 0x_2^2$$

<u>Quadriken</u>

<u>Definition</u>

Als <u>Quadrik</u> bezeichnet man die Lösungsmenge einer Gleichung der Form

$$\underbrace{x^T A x}_{\text{quadratisch}} + \underbrace{a^T x}_{\text{lineares}} + \underbrace{\alpha}_{\text{konstant}} = 0$$

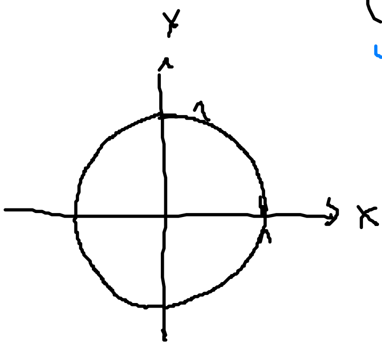
mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Die Quadrik liegt in <u>Normalform</u> vor (wenn man den „Typ" erkennen), wenn $x^T A x$ rein quadratisch ist und $a^T x + \alpha$ durch keine affine Substitution (d.h. eine Substitution der Form $x' = Dx + d$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$) vereinfacht werden kann.

Beispiel

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\underbrace{(x,y)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{x^2+y^2} - (0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 1 = 0$$




## Transformation einer Quadrik auf Normalform

1. Führe Hauptachsentransformation

$\Rightarrow$ liefert Matrix $Q$ so, dass $A' = Q^T A Q$ Diagonalmatrix

D.h. $x^T A x + a^T x + \alpha = 0$

$$\Big\updownarrow \quad \begin{cases} x = Q x' \iff \underline{x'} = Q^{-1} x = \underline{Q^T x} \\ \underline{a' = Q^T a} \end{cases}$$

$$(x')^T A' x' + (a')^T x' + \alpha = 0$$

2. Führe folgende Substitution durch

$$x''_i = \begin{cases} x'_i & \text{falls } \lambda_i = 0 \\ x'_i + \dfrac{a'_i}{2\lambda_i} & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

Letzteres entspricht einer Verschiebung und ist bekannt als quadratische Ergänzung

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Als Ergebnis erhalten wir eine Quadrik in Normalform

$$(x'')^T A' x'' + (a')^T x'' + \alpha' = 0$$

wobei $a_i' \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ und $\boxed{\alpha' = \alpha - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \frac{(a_i')^2}{4\lambda_i}}$

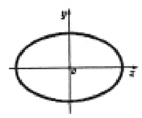
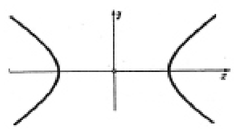
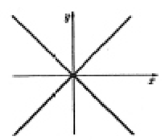
Es gibt insgesamt für

$n=2$ 9 verschiedene „Typen" von Normalformen

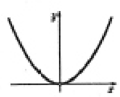
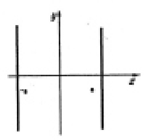
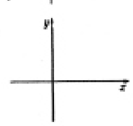
$n=3$ 17 —"—

**Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_2$** (Konstante $a, b, p$ alle $\neq 0$)

Rang $A = 2$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ | Ellipse (evtl. Kreis) |  |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ | leere Menge | |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ | Hyperbel |  |
| $x^2 + a^2 y^2 = 0$ | Punkt | |
| $x^2 - a^2 y^2 = 0$ | Geradenpaar mit Schnittpunkt |  |

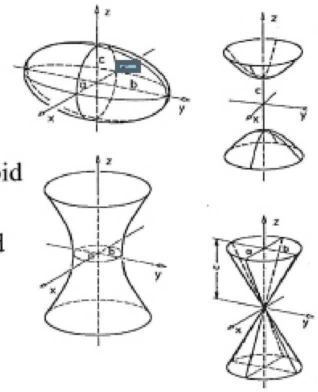
Rang $A = 1$ (Ein Eigenwert $= 0$)

| | | |
|---|---|---|
| $x^2 - 2py = 0$ | Parabel |  |
| $x^2 - a^2 = 0$ | paralleles Geradenpaar |  |
| $x^2 + a^2 = 0$ | leere Menge | |
| $x^2 = 0$ | Gerade $x = 0$ |  |

**Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_3$** (Konstante $a, b, c, p$ alle $\neq 0$)

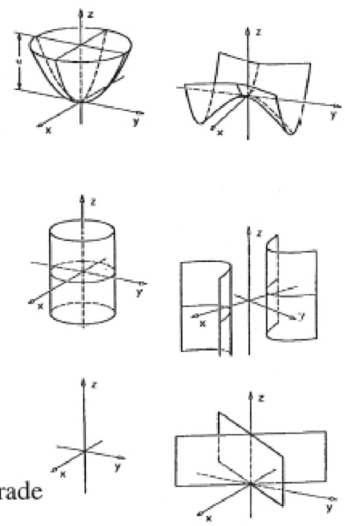
Rang $A = 3$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ | Ellipsoid (evtl. Kugel) |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ | leere Menge |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ | zweischaliges Hyperboloid |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ | einschaliges Hyperboloid |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ | Punkt |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ | Kegel |



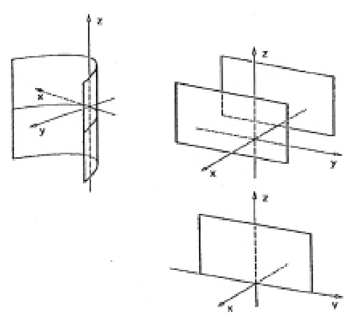
Rang $A = 2$ (Ein Eigenwert $= 0$)

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2pz=0$ | elliptisches Paraboloid |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2pz=0$ | hyperbolisches Paraboloid |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ | leere Menge |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ | elliptischer Zylinder |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$ | hyperbolischer Zylinder |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ | Gerade |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ | Ebenenpaar mit Schnittgerade |



Rang $A = 1$ (Zwei Eigenwerte $= 0$)

| | |
|---|---|
| $x^2-2py=0$ | parabolischer Zylinder |
| $x^2-a^2=0$ | paralleles Ebenenpaar |
| $x^2+a^2=0$ | leere Menge |
| $x^2=0$ | Ebene |



Beispiel

Gegeben $$Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{x^2-2y^2+4xy}_{x^TAx} + \underbrace{\sqrt{5}\,x+2\sqrt{5}\,y}_{a^Tx} \underbrace{-\frac{3}{4}}_{\alpha} = 0$$

1. Hauptachsentransformation

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = -\frac{3}{4}$

b) Eigenwerte und normierte Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$$ entspricht Drehung um 26,25°

// Drehmatrix $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A' = Q^T A Q = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$$

$$a' = Q^T a \qquad (\text{s.o.})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x')^T A' x'}_{2(x_1')^2 - 3(x_2')^2} + \underbrace{(a')^T x'}_{+4x_1' + 3x_2'} + \alpha = 2(x_1')^2 - 3(x_2')^2 + 4x_1' + 3x_2' - \frac{3}{4} = 0$$

ist noch „verschoben"

2. Substitution

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{2\lambda_1} = x_1' + \frac{4}{2\cdot 2} = x_1' + 1$$

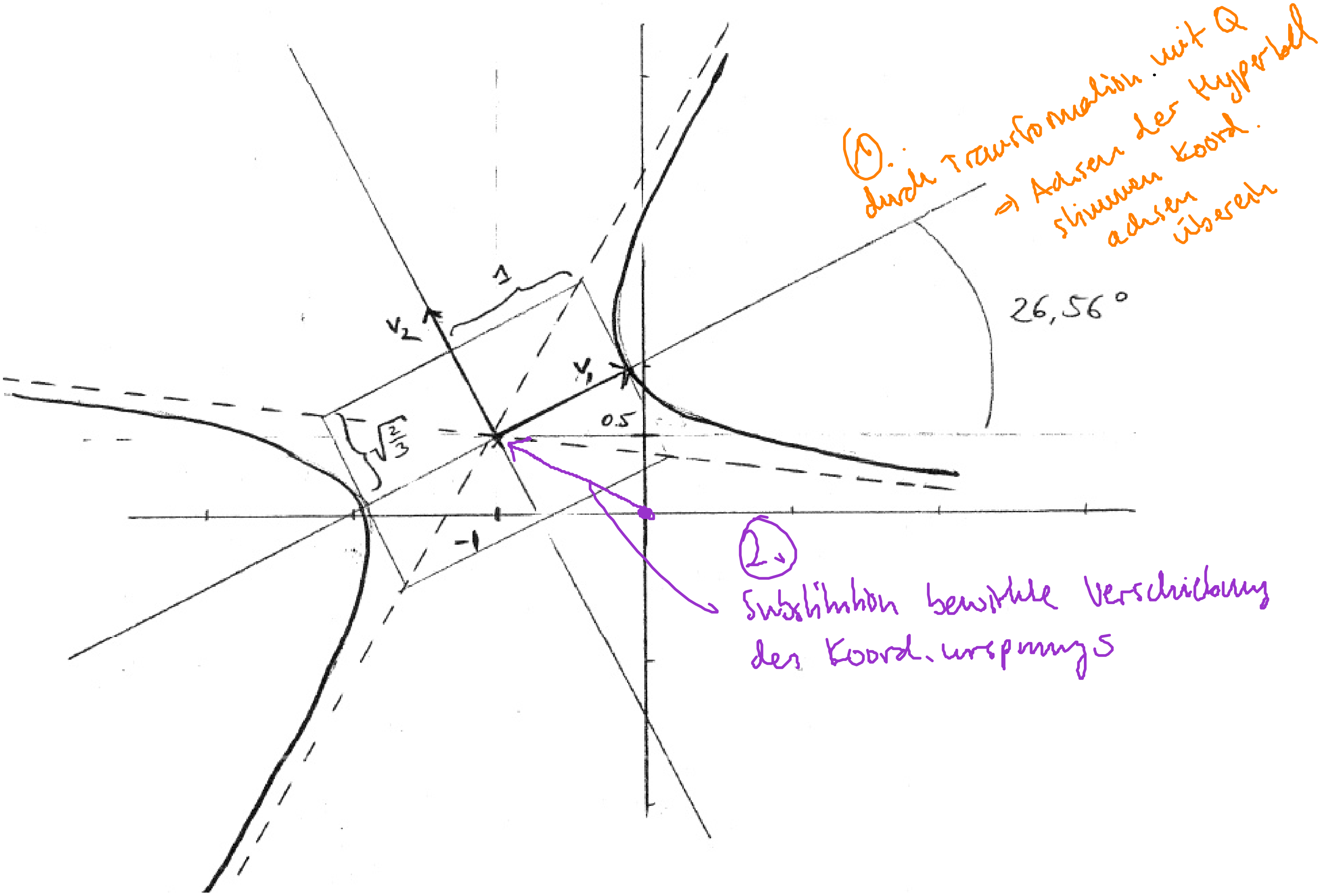
$$x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{2\lambda_2} = x_2' + \frac{3}{2\cdot(-3)} = x_2' - \frac{1}{2}$$

$$\alpha' = \alpha - \underbrace{\sum_{i:\lambda_i\neq 0}\frac{(a_i')^2}{4\lambda_i}}_{\text{„Korrektur" bei quadrat. Ergänzung s.o.}} = \underbrace{-\frac{3}{4}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{4^2}{4\cdot 2}}_{\frac{(a_1')^2}{2\cdot\lambda_1}} - \underbrace{\frac{3^2}{4\cdot(-3)}}_{\frac{(a_2')^2}{2\cdot\lambda_2}}$$

$= -2$ //

Damit erhält man die Quadrik in Normalform

$$2(x_1'')^2 - 3(x_2'')^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \text{Hyperbel}$$




## Kapitel 7 Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

**Definition**

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Abbildung/Funktion mit $n$ Variablen.

$D$ heißt Definitionsbereich von $f$

## Spezialfälle

$n=1 \quad f: \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m$ // Kurven im Raum

$m=1 \quad f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ // reellwertige Funktionen

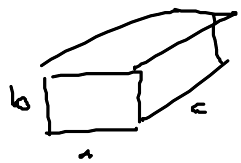
## Beispiele

1. $f(x,y) = 3x^7 y + 2x + 5y^6 - 7$ // $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

2. Quadratische Formen: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q(x) = x^T A x$

3. $f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} x - y + z^3 \\ 6x^2 y - y^4 z \end{pmatrix}}_{\text{Vektor!}}$ // $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

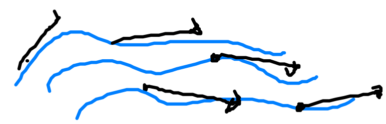
4. Volumen eines Quaders




$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$ // $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

5. Geschwindigkeitsverteilung in einer Flüssigkeit

$v(x,y,z): \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$



**Definition** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

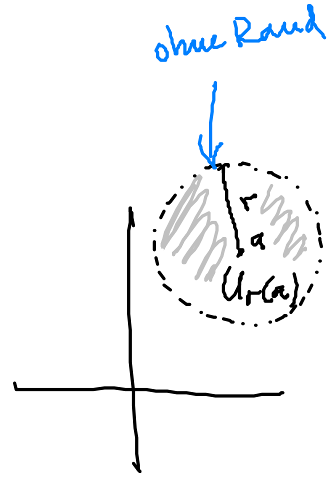
a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

vgl. Standardskalarprodukt

der Abstand von $x$ und $y$

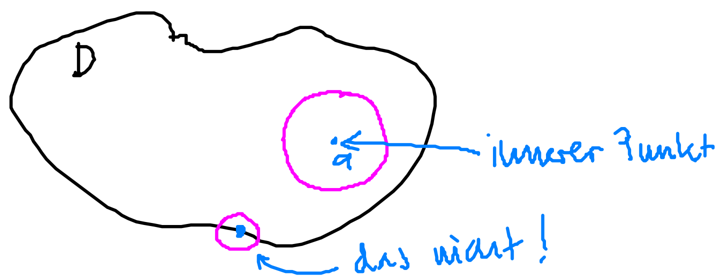
b) Zu festem $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ heißt

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$$




<u>r-Umgebung</u> von $a$

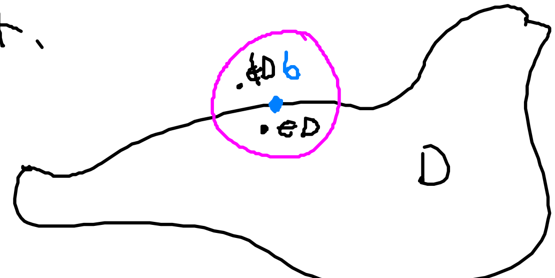
c) Ein Punkt $a \in D$ heißt <u>innerer Punkt</u> von $D$, falls es eine $r$-Umgebung von $a$ gibt, die ganz in $D$ liegt




d) $D$ heißt <u>offen</u>, wenn jeder Punkt von $D$ innerer Punkt ist

verallgemeinert „offenes Intervall"

e) Ein Punkt $b \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Randpunkt</u> von $D$, falls jede $r$-Umgebung sowohl einen Punkt aus $D$ als auch einen nicht aus $D$ enthält.




Die Menge aller Randpunkte von $D$ heißt <u>Rand von D</u>, Bezeichnung $\partial D$.

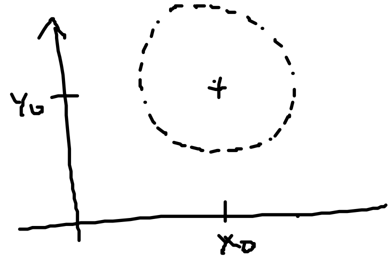
delta.

f) $D$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn $D$ alle seine Randpunkte enthält

<u>Beispiele</u>

1. Die Kreisscheibe (ohne Rand)

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-y_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \right\}$$

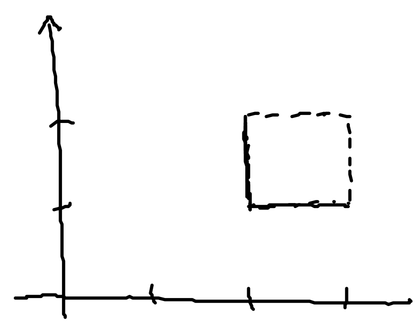



ist offen

Der Rand ist $\partial K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \right\}$

2. Das Rechteck

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2 \leq x < 3 \;,\; 1 \leq y < 2 \right\}$$



ist <u>weder</u> offen <u>noch</u> abgeschlossen.

verallg. halboffene Intervalle

3. $\mathbb{R}^2$ ist offen <u>und</u> abgeschlossen!

$\mathbb{R}^2$ hat keine Randpunkte, daher gehören alle dazu