Wdh. quadratische Formen

$$Q(x) = x^T A x$$ liefert für jedes x eine Zahl.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + \underbrace{2x_1x_2 + 2x_1x_2}_{\text{falls keine gemischten Terme, dann heißt quadrat. Form rein.}} + 0x_2^2$$

falls keine gemischten Terme, dann heißt quadrat. Form rein.

<u>Quadriken</u>

<u>Definition</u>

Als <u>Quadrik</u> bezeichnet man die Lösungsmenge einer Gleichung der Form

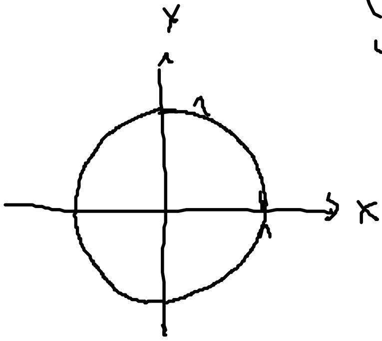
$$\underbrace{x^T A x}_{\text{quadratisch}} + \underbrace{a^T x}_{\text{lineares}} + \underbrace{\alpha}_{\text{konstant}} = 0$$

mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Die Quadrik liegt in <u>Normalform</u> vor (wenn man den „Typ" erkennen), wenn $x^T A x$ rein quadratisch ist und $a^T x + \alpha$ durch keine affine Substitution (d.h. eine Substitution der Form $x' = Dx + d$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$) vereinfacht werden kann.

Beispiel

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



$$\underbrace{(x,y)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{x^2+y^2} - (0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 1 = 0$$

Transformation einer Quadrik auf Normalform

1. Führe Hauptachsentransformation

   $\Rightarrow$ liefert Matrix Q so, dass $A' = Q^T A Q$ Diagonalmatrix

   D.h. $x^T A x + a^T x + \alpha = 0$

$$\Big\updownarrow \quad \begin{cases} x = Qx' \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x'} = Q^{-1}x = \underline{Q^T x} \\ \underline{a' = Q^T a} \end{cases}$$

$$(x')^T A' x' + (a')^T x' + \alpha = 0$$

2. Führe folgende Substitution durch

$$x''_i = \begin{cases} x'_i & \text{falls } \lambda_i = 0 \\ x'_i + \dfrac{a'_i}{2\lambda_i} & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

Letzteres entspricht einer Verschiebung und ist bekannt als quadratische Ergänzung

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Als Ergebnis erhalten wir eine Quadrik in Normalform

$$(x'')^T A' x'' + (a')^T x'' + \alpha' = 0$$

wobei $a'_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ und $\boxed{\alpha' = \alpha - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \frac{(a'_i)^2}{4\lambda_i}}$

Es gibt insgesamt für

$n=2$ 9 verschiedene „Typen" von Normalformen

$n=3$ 17 —"—

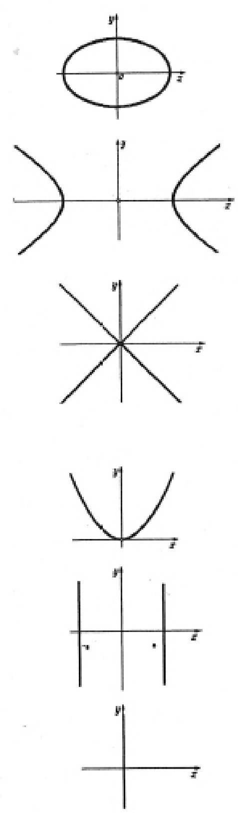
Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_2$ (Konstante a, b, p alle $\neq 0$)

Rang $A = 2$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Ellipse (evtl. Kreis)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$x^2 + a^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - a^2 y^2 = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt

Rang $A = 1$ (Ein Eigenwert $= 0$)

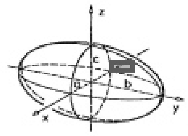
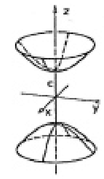
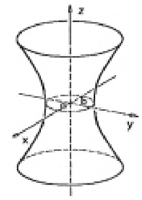
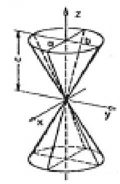
$x^2 - 2py = 0$	Parabel
$x^2 - a^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade $x = 0$



Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_3$ (Konstante a, b, c, p alle $\neq 0$)

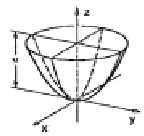
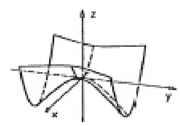
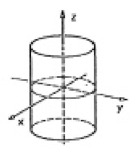
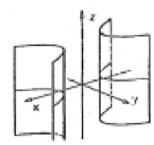
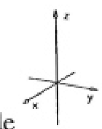
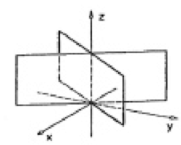
Rang $A = 3$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Ellipsoid (evtl. Kugel)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kegel

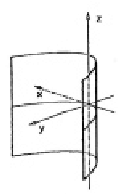
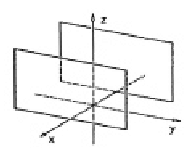
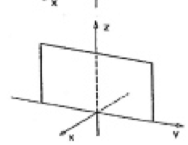
Rang $A = 2$ (Ein Eigenwert $= 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Gerade
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Ebenenpaar mit Schnittgerade

Rang $A = 1$ (Zwei Eigenwerte $= 0$)

$x^2 - 2py = 0$	parabolischer Zylinder
$x^2 - a^2 = 0$	paralleles Ebenenpaar
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Ebene

Beispiel

Gegeben $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{x^2 - 2y^2 + 4xy}_{x^TAx} + \underbrace{\sqrt{5}\,x + 2\sqrt{5}\,y}_{a^Tx} \underbrace{- \frac{3}{4}}_{\alpha} = 0$

1. Hauptachsentransformation

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = -\frac{3}{4}$

b) Eigenwerte und normierte Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$$ entspricht Drehung um 26,25°

// Drehmatrix $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A' = Q^T A Q = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$$

$$a' = Q^T a \qquad \text{(s.o.)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x')^T A' x'}_{2(x_1')^2 - 3(x_2')^2} + \underbrace{(a')^T x'}_{+4x_1' + 3x_2'} + \underbrace{\alpha}_{-\frac{3}{4}} = 2(x_1')^2 - 3(x_2')^2 + 4x_1' + 3x_2' - \frac{3}{4} = 0$$

ist noch „verschoben"

2. Substitution

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{2\lambda_1} = x_1' + \frac{4}{2\cdot 2} = x_1' + 1$$

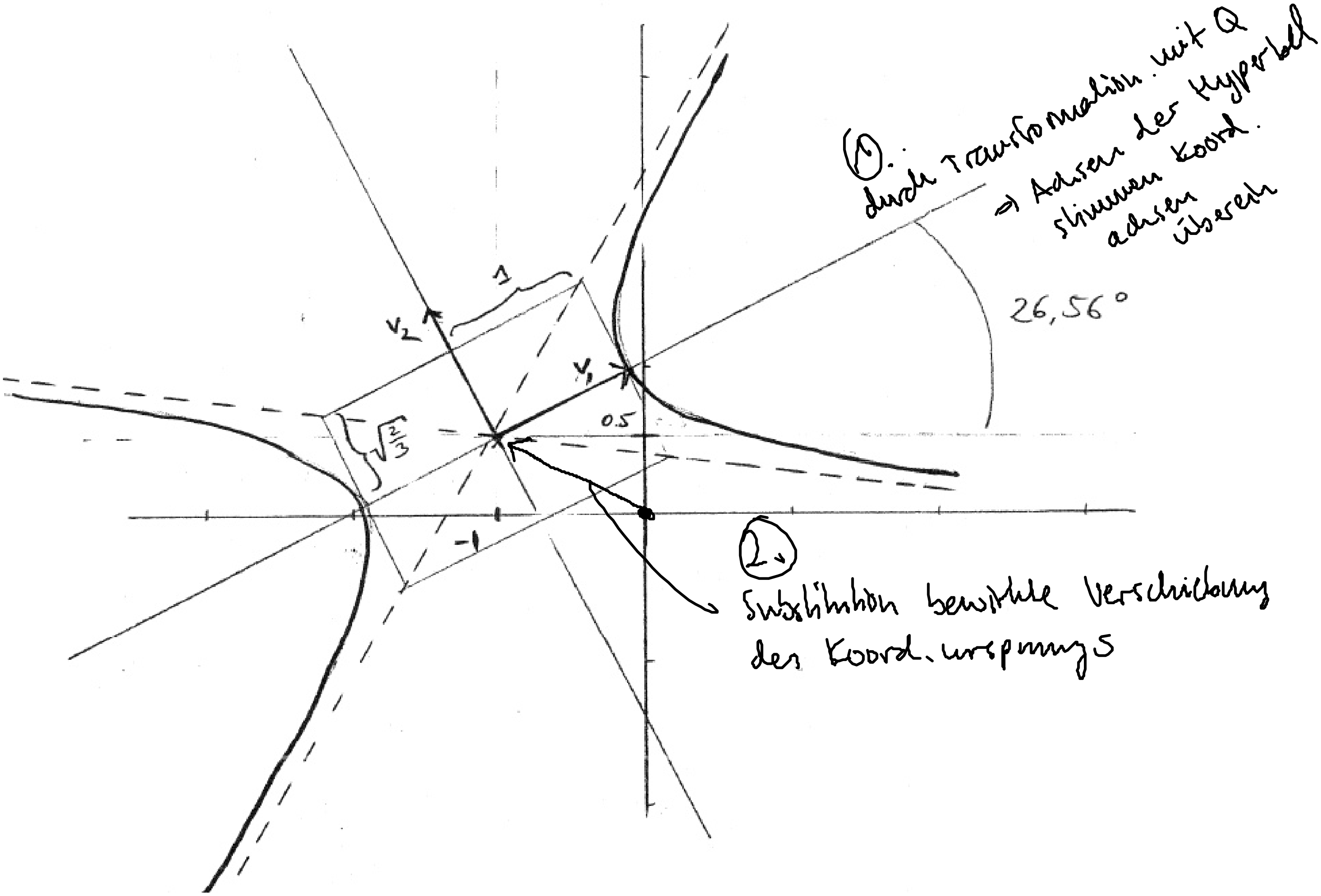
$$x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{2\lambda_2} = x_2' + \frac{3}{2\cdot(-3)} = x_2' - \frac{1}{2}$$

$$\alpha' = \alpha - \underbrace{\sum_{i:\lambda_i\neq 0}\frac{(a_i')^2}{4\lambda_i}}_{\text{„Korrektur" bei quadrat. Ergänzung, s.o.}} = \underbrace{-\frac{3}{4}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{4^2}{4\cdot 2}}_{\frac{(a_1')^2}{2\cdot\lambda_1}} - \underbrace{\frac{3^2}{4\cdot(-3)}}_{\frac{(a_2')^2}{2\cdot\lambda_2}}$$

$= -2$ //

Damit erhält man die Quadrik in Normalform

$$2(x_1'')^2 - 3(x_2'')^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \text{ Hyperbel}$$



Kapitel 7 Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Abbildung/Funktion mit n Variablen.

D heißt Definitionsbereich von f

Spezialfälle

$n=1 \quad f: \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m$ // Kurven im Raum

$m=1 \quad f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ // reellwertige Funktionen

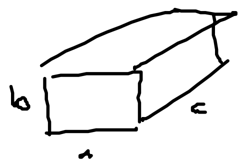
Beispiele

1. $f(x,y) = 3x^7 y + 2x + 5y^6 - 7$ // $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

2. Quadratische Formen: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q(x) = x^T A x$

3. $f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} x - y + z^3 \\ 6x^2 y - y^4 z \end{pmatrix}}_{\text{Vektor!}}$ // $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

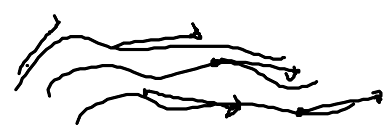
4. Volumen eines Quaders



$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$ // $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

5. Geschwindigkeitsverteilung in einer Flüssigkeit

$v(x,y,z): \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$



Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

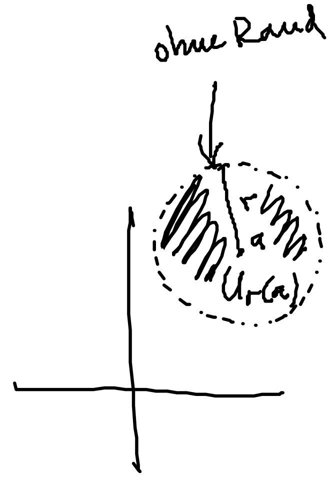
a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

vgl. Standardskalarprodukt

der Abstand von x und y

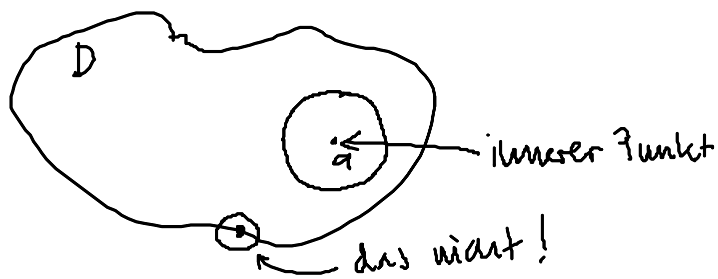
b) Zu festem $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ heißt

$$U_r(a) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r \}$$



r-Umgebung von a

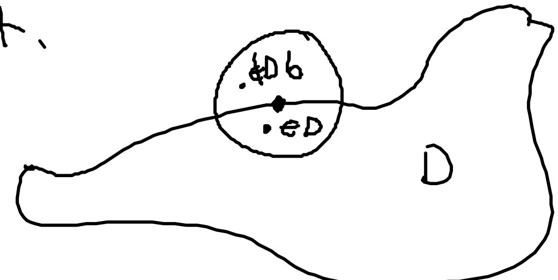
c) Ein Punkt $a \in D$ heißt innerer Punkt von D, falls es eine r-Umgebung von a gibt, die ganz in D liegt



d) D heißt offen, wenn jeder Punkt von D innerer Punkt ist

verallgemeinert „offenes Intervall"

e) Ein Punkt $b \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von D, falls jede r-Umgebung sowohl einen Punkt aus D als auch einen nicht aus D enthält.



Die Menge aller Randpunkte von D heißt Rand von D, Bezeichnung ∂D.

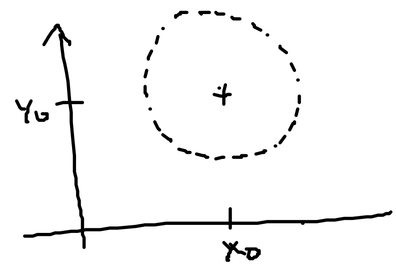
↑ delta.

f) D heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn D alle seine Randpunkte enthält

<u>Beispiele</u>

1. Die Kreisscheibe (ohne Rand)

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-y_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \right\}$$

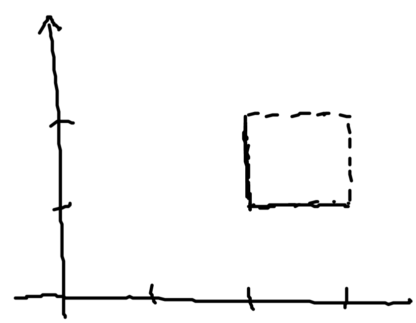


ist offen

Der Rand ist $\partial K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \right\}$

2. Das Rechteck

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2 \leq x < 3 \,,\; 1 \leq y < 2 \right\}$$



ist <u>weder</u> offen <u>noch</u> abgeschlossen.

verallg. halboffene Intervalle

3. $\mathbb{R}^2$ ist offen <u>und</u> abgeschlossen!

$\mathbb{R}^2$ hat keine Randpunkte, daher gehören alle dazu