

Neues Lernzentrum an der Lichtwiese

→ bitte rechtzeitig dort erscheinen!

Frage von gestern: Determinantenberechnung per Gauß Algorithmus,

$$\text{z.B. } \begin{matrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \mathbb{I} \leftrightarrow \mathbb{II} \\ 4\mathbb{II} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{II} - \mathbb{I}} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

daher $\det A = -20$

$$\Rightarrow \det A = 4 \cdot (-20)$$

falsch, weil noch durch 4 geteilt werden muss

Alternativ per Gauß:

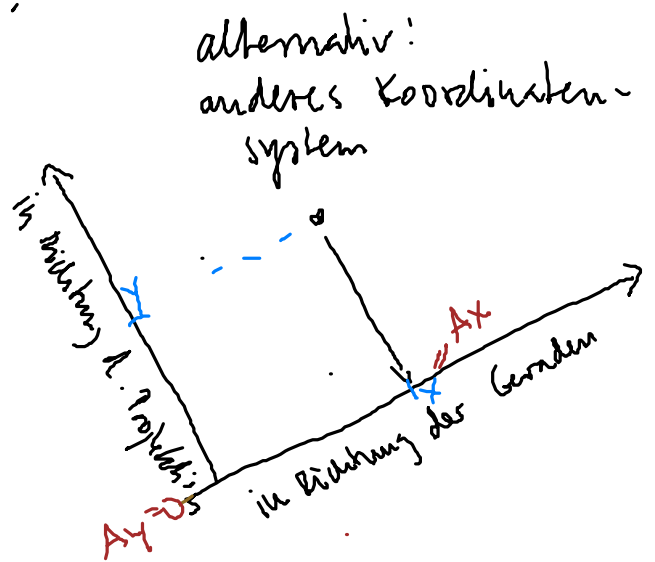
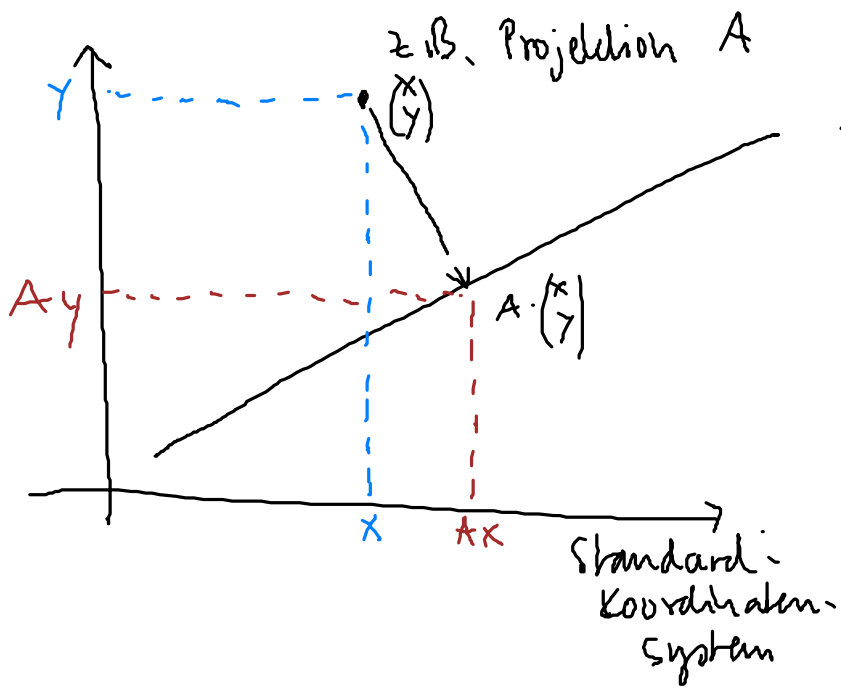
$$\begin{matrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \mathbb{I} \leftrightarrow \mathbb{II} \\ \text{VZW!} \end{matrix}} \begin{matrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{II} - 4\mathbb{I}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = \overline{-20}$$

$\stackrel{\uparrow}{=} \text{VZW}$

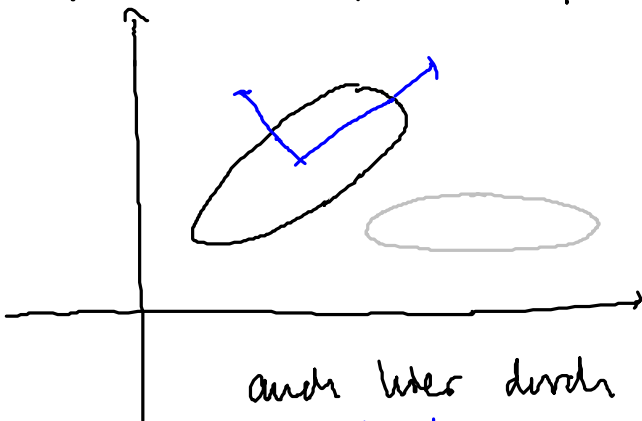
„Was den Zeilen recht ist, ist den Spalten billig“
soll heißen: Rechenregeln (z.B. Zeilentausch \Rightarrow VZW) gelten
auch für die Spalten (z.B. Spaltentausch \Rightarrow VZW)

Warum Eigenwerte/Eigenvektoren?



Motivation war also, ein Koordinatensystem zu finden, an dem man unmittelbar ablesen kann, was die Abbildung tut, beantwortet wurde diese Suche mit einem „Koordinatensystem“ (= Basis) aus Eigenvektoren.

Motivation für das Folgende (quadratische)



andere über durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems („Koordinatentransformation“) den „Typ“ einer quadratischen Gleichung bestimmen (z.B. Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, ...)

gestern: F Bilinearform // z.B. Skalarprodukt

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis // „Koordinatensystem“

Dann ex. eindeutige Matrix A , die F beschreibt

$$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = F(v_i, v_j)$$

Definition

Sei $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A die bzgl. Basis B zugehörige Matrix mit $F(x, y) = x^T A y$

z.B. Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

F Standard Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle & \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle & \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x, y) = \langle x, y \rangle$ ist dasselbe wie

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle x, y \rangle$$

Dann heißt die

Abbildung $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Q(x) = F(x, x) = x^T A x$$

quadratische Form

Ist zusätzlich A eine Diagonalmatrix, dann heißt

Q reel quadratisch.

Beispiel

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2$$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Die von den Vektoren v_1', \dots, v_n' aufgespannten Teilräume (z.B. Geraden) heißen Hauptachsen.

Vorgehen bei Hauptachsentransformation

gegeben: Quadratische Form $Q(x)$

- (1) Bestimme zugehörige Matrix A mit $Q(x) = x^T A x$
- (2) Bestimme die Eigenwerte von A (und deren Vielfachheiten)
- (3) Bestimme eine ONB $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ von Eigenvektoren von A in \mathbb{R}^n

(4) Sei $Q = (v_1', \dots, v_n')$ // d.h. Q enthält v_1', \dots, v_n' als Spalten

Dann gilt

$$A' = Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beschreibung der quadrat. Form in "neuen" Koordinaten

Beispiel

Gegeben $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \underline{x^2} + \underline{6xy} - \underline{2y^2} - \underline{2yz} + \underline{z^2}$

$$(1) \quad A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(ist immer symmetrisch)

3x3 Matrix, weil
3 Variablen

gemischte Terme:
Koeff. symmetrisch
verteilen (je die Hälfte)

Rest mit 0 auffüllen

$$(2) \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 13\lambda + 12$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$$

(3) Eigenvektoren (per Lösung der homogenen LGS)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nach Normierung (d.h. Teilen der u_i durch ihre Länge $\|u_i\|$)

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(4) Gesamtes Q (die erledigt gemachte Koordinatentransformation)

$$Q = (v_1', v_2', v_3') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

(1)

d.h. $A' = Q^T A Q$ beschreibt quadratische Form $Q(x)$
 \uparrow \uparrow
(4) (4) reine quadratische.

✓ Bemerkung: Nicht Matrix Q aus (4) und quadratische Form $Q(x)$ verwechseln!

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

soll heißen: In „neuen“ Koordinaten heißt $Q(x)$;
 $x^2 + 3y^2 - 4z^2$

Mit diesen quadratischen Formen bilden wir beim nächsten Mal quadratische Gleichungen (sog. Quadriken), die dann Kreise, Ellipsen etc. beschreiben.