Neues Lernzentrum an der Lichtwiese

→ bitte rege dort erscheinen!

<u>Frage von gestern</u>: Determinantenberechnung per Gauß-Algorithmus,

z.B. $A = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \xrightarrow[\mathrm{II}-\mathrm{I}]{} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = 4 \cdot (-20)$
falsch, weil noch durch 4 geteilt werden muss

direkt $\det A = -20$

Alternativ per Gauß:

$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{VZW!}]{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-4\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

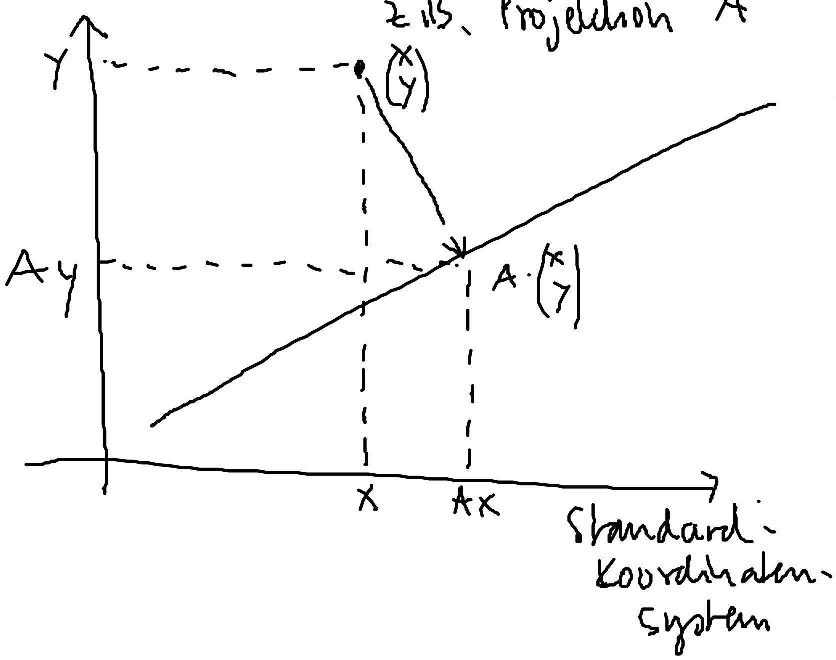
$\Rightarrow \det = -20$

$\hat{=}$ VZW

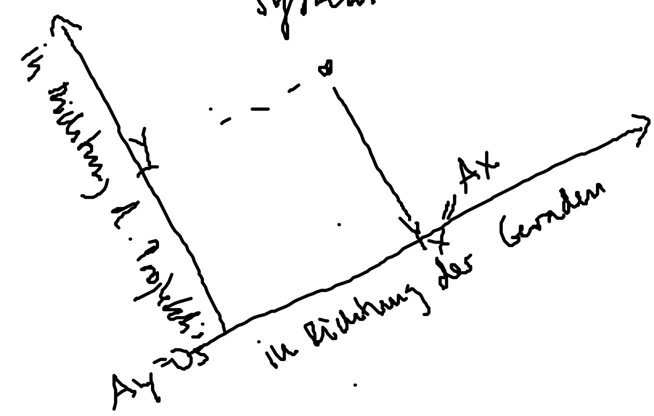
„Was den Zeilen recht ist, ist den Spalten billig"

soll heißen: Rechenregeln (z.B. Zeilentausch ⇒ VZW) gelten auch für die Spalten (z.B. Spaltentausch ⇒ VZW)

Warum Eigenwerte/Eigenvektoren?



alternativ:
anderes Koordinaten-
system



Motivation war also, ein Koordinatensystem zu bilden, an dem man unmittelbar ablesen kann, was die Abbildung tut, beantwortet wurde diese Suche mit einem „Koordinatensystem" (= Basis) aus Eigenvektoren.

Motivation für das Folgende (quadratische)

auch hier durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems („Koordinatentransformation") den „Typ" einer quadratischen Gleichung bestimmen (z.B. Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, ..)

gestern: F Bilinearform // z.B. Skalarprodukt

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis // „Koordinatensystem"

Dann ex. ordentliche Matrix A, die F „beschreibt"

$A = (a_{ij})$ $\quad a_{ij} = F(v_i, v_j)$

Definition

Sei $F : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A die bzgl. Basis B zugehörige Matrix mit $F(x,y) = x^T A y$

z.B. Basis $B = \{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \}$

F Standardskalarprodukt

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle & \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle & \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F(x,y) = \langle x, y \rangle$ ist dasselbe wie

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle x, y \rangle$$

Dann heißt die Abbildung $Q : V \to \mathbb{R}$ mit

$$Q(x) = F(x,x) = x^T A x$$

quadratische Form

Ist zusätzlich A eine Diagonalmatrix, dann heißt Q rein quadratisch.

Beispiel

$$Q(x) = \underline{2} x_1^2 + 4 x_1 x_2 - x_2^2 \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + 2x_2 \,,\, 2x_1 - x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(2x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 - x_2)$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1 x + 2x_1 x_2 - x_2^2 = Q(x)$$

...

<u>Frage</u>: Lässt sich jede quadratische Form in eine <u>rein</u> quadratische umwandeln?

// denn dann sind die gemischten Terme weg und man ggf. den „Typ" der Gleichung

// analog zur Eigenwert-Frage ob: kann ich durch Koord. transformation die <u>rein</u> quadratische Form erzeugen.

<u>Hauptachsentransformation</u>

<u>Satz</u>

Sei $Q(x) = F(x,x) = x^T A x$ eine quadratische Form. Dann gibt es ein ONB $B' = \{v_1', ..., v_n'\}$ so, dass die Matrix A' die F bzgl B' die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(also Diagonalgestalt) hat, d.h.

$$Q(x) = x^T A x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

(also Q hat <u>rein</u> quadratische Form)

Die von den Vektoren $v_1', \dots, v_n'$ aufgespannten Teilräume (z.B. Geraden) heißen <u>Hauptachsen</u>.

<u>Vorgehen bei Hauptachsentransformation</u>

gegeben: Quadratische Form $Q(x)$

(1) Bestimme zugehörige Matrix A mit $Q(x) = x^T A x$

(2) Bestimme die Eigenwerte von A (und deren Vielfachheiten)

(3) Bestimme eine ONB $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ von Eigenvektoren von A in $\mathbb{R}^n$

(4) Sei $Q = (v_1', \dots, v_n')$ // d.h. Q enthält $v_1', \dots, v_n'$ als Spalten

Dann gilt

$$\underbrace{A'}_{\text{Beschreibung der quadrat. Form in „neuen" Koordinaten}} = Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u>

Gegeben $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2$

(1) $A = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & \;\; y & \;\; z \end{matrix} \end{array}$

// 3×3 Matrix, weil 3 Variablen

/ gemischte Terme: Koeff. symmetrisch verteilen (je die Hälfte)

/ Rest mit 0 auffüllen

(ist immer symmetrisch)

(2) $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^3 - 13\lambda + 12$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -4$

(3) Eigenvektoren (per Lösung der homogenen LGS)

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nach Normierung (d.h. Teilen der u_i durch ihre Länge $\|u_i\|$)

$v_1' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) Gesuchtes Q (die erledigt gesuchte Koordinatentransformation)

$$Q = (v_1', v_2', v_3') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

(1)

d.h. $A' = Q^T A\, Q$ beschreibt quadratische Form $Q(x)$ rein quadratisch.

$\quad\;\; \uparrow \qquad \uparrow$

$\quad (4) \qquad (4)$

Bemerkung: Nicht Matrix Q aus (4) und quadratische Form $Q(x)$ verwechseln!

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

soll heißen: In „neuen" Koordinaten heißt $Q(x)$:

$$x'^2 + 3y'^2 - 4z'^2$$

Mit diesen quadratischen Formen bilden wir beim nächsten Mal quadratische Gleichungen (sog. Quadriken), die dann Kreise, Ellipsen etc. beschreiben.