Pfingstmontag ist natürlich <u>keine</u> Vorlesung

ES IST ZU LAUT

IMMER NOCH

IST JA NICHT MEIN TONER

VL Anfang 11.45

Thema §7 Orthonormalbasen und orthogonale Matrizen

Erinnerung: Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

1. Länge: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$

   beim Std. skal. prod.: $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

2. Winkel für $x,y \neq 0$

$$\sphericalangle(x,y) := \gamma = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

Zwei Vektoren $x,y \neq 0$ heißen orthogonal $:\Leftrightarrow$ $\langle x,y\rangle = 0$, in Zeichen $x \perp y$

Definition

Eine Basis $b_1,\dots,b_n$ heißt <u>orthogonal</u>, wenn die Vektoren

b_i paarweise orthogonal sind, d.h. wenn

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \qquad \text{für alle } i \neq j$$

Eine Basis heißt orthonormal, falls sie orthogonal ist, und alle Vektoren b_i normiert sind, d.h.

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \qquad \text{für alle } i \neq j$$
$$\| b_i \| = 1 \qquad \text{für alle } i$$

Nochmal anders: orthonormal heißt

$$\boxed{\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}}$$

Beispiel: Standardbasis (= kanonische Basis) im $\mathbb{R}^3$

Koordinaten bzgl einer Orthonormalbasis (ONB)

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine ONB und $v \in \mathbb{R}$ beliebig, d.h.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Dann gilt:

n

$$\langle v_i, v\rangle = \langle v_i, \sum_{j=1} \alpha_j v_j \rangle$$

Linearität im 2. Argument $\Rightarrow$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{=\begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}} = \alpha_i$$

D.h. die i-te Koordinate eines Vektors erhält man durch Skalarprodukt mit dem i-ten Basisvektor (geht nur bei ONB!)

<u>Beispiel</u>

Standardbasis (ist ONB) des $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

bel. Vektor $v = \begin{pmatrix}7\\-8\\5\end{pmatrix}$

1. Koord. $\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix}7\\-8\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 7$

2. Koord $\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix}7\\-8\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = -8$

$\vdots$

<u>Bem.</u> Wenn man mit Koordinatensystemen im Computer rechnen will, erscheint es einleuchtend, eine Basis zu „wählen", bei der die Vektoren „möglichst verschieden sind".

Bei endlicher Genauigkeit ist das linke Koord.system geeigneter.

Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

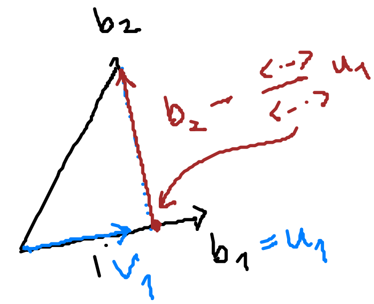
Gegeben m linear unabhängige Vektoren $b_1, \dots, b_m$

Berechne

$$u_1 = b_1 \qquad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 \qquad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = b_3 - \frac{\langle u_1, b_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, b_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \qquad v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$



$\vdots$

$$u_m = b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle u_i, b_m \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$

$$v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|}$$

Bsp.:

$$\underset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$u_1 = b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \overset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix} \right\|}$$

$$u_3 = \overset{b_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} - \frac{\left\langle \overset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} \right\rangle}{\left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} \right\rangle} \overset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} - \frac{\left\langle \overset{u_2}{\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} \right\rangle}{\left\langle \underset{u_2}{\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}} \right\rangle} \cdot \overset{u_2}{\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}} \quad \ldots \quad v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

mit den u wird gerechnet

die v bilden am Ende eine ONB

<u>Satz</u>

$v_1, \ldots, v_m$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_m)$.

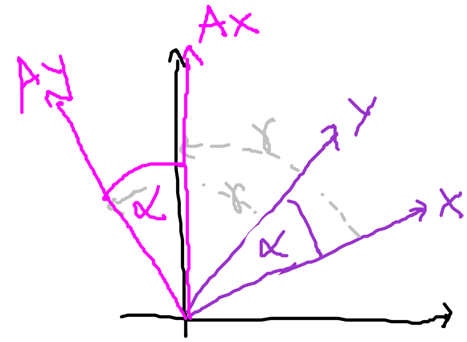
<u>Definition</u>

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt <u>orthogonal</u>, falls

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

<u>Beispiele</u>

z.B. Drehung um Winkel γ im $\mathbb{R}^2$



„Bildlich" sieht man, dass z.B. Winkel erhalten bleiben.

Nachrechnen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\langle Ax, Ay \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma \\ x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\cos\gamma - y_2\sin\gamma \\ y_1\sin\gamma + y_2\cos\gamma \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (x_1\cos\gamma - y_2\sin\gamma)(y_1\cos\gamma - y_2\sin\gamma) \\
&\quad + (x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma)(y_1\sin\gamma + y_2\cos\gamma) \\
&= \ldots = x_1y_1 + x_2y_2 = \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

anderes Bsp. Spiegelung

aber z.B. nicht! Projektionen.

<u>Satz</u>

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent

a) A ist orthogonal

b) $A^TA = E$, d.h. $A^{-1} = A^T$

/ Ah. z.B. wenn A eine Drehung um γ beschreibt, dann beschreibt A^T eine Drehung um $-\gamma$

c) Die Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$.

„äquivalent" heißt: gilt eines der drei, dann auch die anderen beiden (und nur dann)

Bisher kennen wir zwei „interessante" Basen

a) Basis aus Eigenvektoren $\Rightarrow$ Matrix hat besonders einfache Struktur (Diagonalgestalt)

b) ONB $\to$ Inverse sehr einfach, Koordinaten eines Vektor einfach berechenbar

Frage: Wann gilt beides?

Satz (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist symmetrisch (d.h. $A = A^T$)

b) Es gibt eine ONB aus Eigenvektoren von A

c) Es gibt eine orthogonale Matrix Q, so dass

$$A' := Q^T A Q$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel / Anwendung des Satzes

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 11 & -8 \\ 10 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Satz ist konstruktiv, in dem Sinne, dass Q aus ONB bestimmt wird!

charakt. Polynom $\det(A - \lambda E) = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 10 \\ 2 & 11-\lambda & -8 \\ 10 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

Eigenvektoren (durch Lösen der homogenen LGS für jedes λ)

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach obigen Satz (Hauptsatz) gilt $w_i \perp w_j$ $i \neq j$
(denn A ist symmetrisch)

Normierung liefert:

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nach vorletztem $\Rightarrow$ Satz (über orthog. Matrizen)

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Spalten bestehen orthogonalen Vektoren $\Rightarrow$ Q ist orthogonal

und es gilt $A' = Q^T A Q$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ist Diagonalmatrix

// dass die EW auf der Diagonalen stehen ist kein Zufall.

§ 8 Quadratische Formen / Kegelschnitte

Beobachtung:

Zu jeder Bilinearform F und Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ gibt es eine eindeutige Matrix A, die F beschreibt

$$F(x,y) = x^T A y$$

wobei $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = F(v_i, v_j)$

z.B. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Jetzt ist $F(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$

Denn es gilt für $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right)$$

$F(a+b, c) = F(a,c) + F(b,c)$

Bilinearität von F

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \underbrace{F(v_i, v_j)}_{=:a_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_i \cdot a_{ij} = x^T A y$$

führt (morgen) auf bestimmte Quadratische Funktionen (die wir schon kennen)