

Pfingstmontag ist natürlich keine Vorlesung

ES IST  
ZU LAUT

IMMER  
NOCH

VL Anfang  
11.45

IST JA NICHT  
MEIN TONER

Thema §7 Orthonormalbasen und orthogonale Matrizen

Erinnerung: Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle :=$$

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

1. Länge:  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

beim Std. skal. prod. :=  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

2. Winkel für  $x, y \neq 0$

$$\angle(x, y) := \varphi = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Zwei Vektoren  $x, y \neq 0$  heißen orthogonal :  $\Leftrightarrow$

$$\langle x, y \rangle = 0, \text{ in Zeichen } x \perp y$$

Definition

Eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  heißt orthogonal, wenn die Vektoren

$b_i$  paarweise orthogonal sind, d.h. wenn

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \text{für alle } i \neq j$$

Eine Basis heißt orthonormal, falls sie orthogonal ist, und alle Vektoren  $b_i$  normiert sind, d.h.

$$\begin{aligned} \langle b_i, b_j \rangle &= 0 & \text{für alle } i \neq j \\ \|b_i\| &= 1 & \text{für alle } i \end{aligned}$$

Wodurch anders: orthonormal heißt

$$\boxed{\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}}$$

Beispiel = Standardbasis (= kanonische Basis) in  $\mathbb{R}^3$

Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis (ONB)

Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine ONB und  $v \in \mathbb{R}^n$  beliebig, d.h.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Dann gilt:

n

$$\langle v_i, v \rangle = \langle v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle$$

Linearität im 2. Argument  $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}} = \alpha_i$$

Dh. die  $i$ -te Koordinate eines Vektors erhält man durch Skalarprodukt mit dem  $i$ -ten Basisvektor (geht nur bei ONB!)

### Beispiel

Standardbasis (ist ONB) des  $\mathbb{R}^3$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

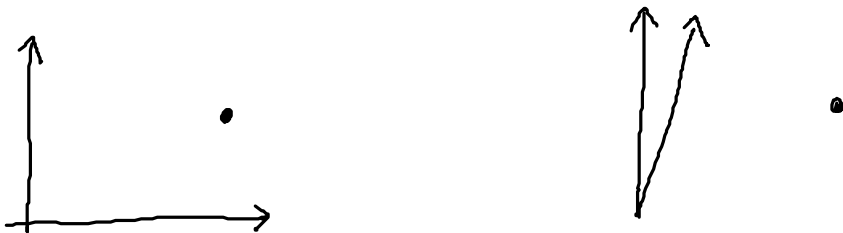
bel.-Vektor  $v = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. Koord.  $\alpha_1 = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 7$

2. Koord.  $\alpha_2 = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = -8$

$\vdots$

Bem. Wenn man mit Koordinatensystemen im Computer rechnen will, erscheint es einleuchtend, eine Basis zu "wählen", bei der die Vektoren "möglichst verschieden" sind.



Bei endlicher Genauigkeit ist das linke Koord.-system geeigneter.

# Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Gegeben  $m$  linear unabhängige Vektoren  $b_1, \dots, b_m$

Berechne

$$u_1 = b_1$$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$$

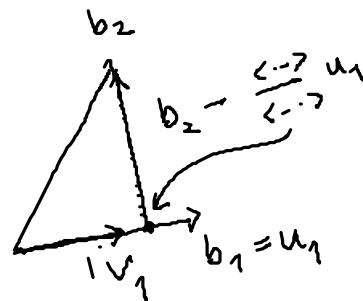
$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = b_3 - \frac{\langle u_1, b_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, b_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

⋮

$$u_m = b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle u_i, b_m \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$



$$v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|}$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3$

$$u_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\dots v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

↑  
mit dem  $u$  wird gerechnet

↑  
die  $v$  bilden  
am Ende eine ONB

### Satz

$v_1, \dots, v_m$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\text{Lin}(b_1, \dots, b_m)$ .

### Definition

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt orthogonal, falls

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

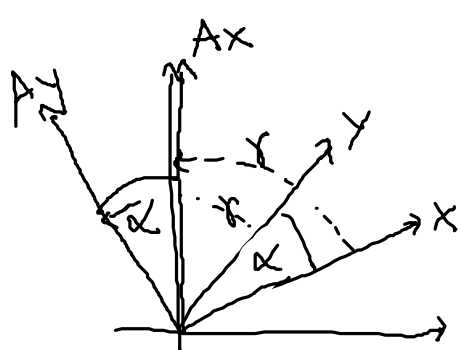
### Beispiele

z.B. Drehung um Winkel  $\gamma$  im  $\mathbb{R}^2$

„Bildlich“ sieht man, dass z.B. Winkel erhalten bleiben.

Nachrechnen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma \\ x_1 \sin \gamma + x_2 \cos \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \cos \gamma - y_2 \sin \gamma \\ y_1 \sin \gamma + y_2 \cos \gamma \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma)(y_1 \cos \gamma - y_2 \sin \gamma) \\ &\quad + (x_1 \sin \gamma + x_2 \cos \gamma)(y_1 \sin \gamma + y_2 \cos \gamma) \\ &= \dots = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

anderes Bsp. Spiegelung  
aber z.B. nicht: Projektionen.

### Satz

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sind äquivalent

a)  $A$  ist orthogonal

b)  $A^T A = E$ , d.h.  $A^{-1} = A^T$

↙ d.h. z.B. wenn  $A$  eine Drehung um  $\gamma$  beschreibt,  
dann beschreibt  $A^T$  eine Drehung um  $-\gamma$

c) Die Spalten von  $A$  bilden eine ONB des  $\mathbb{R}^n$ .

„äquivalent“ heißt: gilt eines der drei, dann auch die anderen beiden (und umgekehrt)

Bisher kennen wir zwei "interamente" Basen

a) Basis aus Eigenvektoren  $\Rightarrow$  Matrix hat besonders einfache Struktur (Diagonalgestalt)

b) ONB  $\Rightarrow$  Inverse sehr einfach, Koordinaten eines Vektor einfach berechenbar

Frage: Warum gilt beides?

Satz (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen)

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $A$  ist symmetrisch (d.h.  $A = A^T$ )
- Es gibt eine ONB aus Eigenvektoren von  $A$
- Es gibt eine orthogonale Matrix  $Q$ , so dass

$$A' := Q^T A Q$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel / Anwendung des Satzes

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 11 & -8 \\ 10 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Satz ist konstruktiv, in dem Sinne, dass  $Q$  aus ONB bestimmt wird!

Charakt. Polynom  $\det(A - \lambda E) = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 10 \\ 2 & 11-\lambda & -8 \\ 10 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -1$

Eigenvektoren (durch Lösen der homogenen LGS für jedes  $\lambda$ )

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach obigen Satz (Hauptsatz) gilt  $w_i \perp w_j$   $i \neq j$   
(denn  $A$  ist symmetrisch)

Normierung  
liefert:

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nach vorherstem

$\Rightarrow$

Satz (über orthog.  
Matrizen)

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Spalten bestehen orthogonaler  
Vektoren  $\Rightarrow Q$  ist orthogonal

und es gilt

$$A' = Q^T A Q$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ist Diagonalmatrix}$$

// dass die EW auf der Diagonalen stehen ist kein Zufall.

§ 8 Quadratische Formen / Kegelschnitte



Beobachtung:

Zu jeder Bilinearform  $F$  und Basis  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  gibt es eine eindeutige Matrix  $A$ , die  $F$  beschreibt

$$F(x, y) = x^T A y$$

wobei  $A = (a_{ij})$  mit  $a_{ij} = F(v_i, v_j)$

z.B.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $v_1 \quad v_2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jetzt ist } F(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$$

Daum es gilt für  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right)$$

Bilinearität  
von  $F$   $\Rightarrow$   $\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \underbrace{F(v_i, v_j)}_{=: a_{ij}}$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot a_{ij} = x^T A y$$

$$\left. \begin{array}{l} F(a+b, c) \\ = F(a, c) + F(b, c) \end{array} \right\}$$

führt (worgen) auf bestimmte quadratische Funktionen  
(die wir schon kennen)