- Theoretisch ab heute: Audio-Mitschnitt
- Skript (inoffizielles) → Link auf Homepage

Hintergrund: Suche möglichst einfache Darstellung einer lin. Abb. im Idealfall so, dass erkennbar wird, um welchen „Typ" der Abb. es sich handelt.

Schon beobachtet: Diagonalgestalt besonders vorteilhaft.

λ Eigenwert (EW) einer Matrix A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ gibt so, dass

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

Jeder Vektor, der dies erfüllt heißt Eigenvektor (EV) zu λ.

<u>Satz</u>

λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist.

charakt. Polynom : $\det(A - \lambda E)$

<u>Beispiel</u>

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

char. Polyn. $\det(A - \lambda E)$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 \quad = \lambda^2 - 8\lambda + 7 \quad \overset{!}{=} 0$$
$$= (\lambda-7)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ $\lambda = 7$ und $\lambda = 1$ sind Eigenwerte von A.

// d.h. es gibt zwei Richtungen, in der einen „passiert gar nichts" ($\lambda = 1$) und in der anderen passiert eine Streckung um Faktor 7 ($\lambda = 7$)

Die Richtungen (Eigenvektoren) müssen berechnet werden.

<u>Allgemein</u>

Zerlege das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra geht das in komplexen Zahlen immer.

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Die Vielfachheit k_i der Nullstelle λ_i heißt die <u>algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i</u>

<u>Beachte</u>: In $\mathbb{R}$ muss das char. Polynom nicht unbedingt Nullstellen haben, d.h. A hat nicht unbedingt reelle Eigenwerte.

<u>Beispiele</u>

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda E)$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \,:$$

hat keine reellen Eigenwerte

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \cos\gamma - \lambda & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\gamma - \lambda)^2 + \sin^2\gamma$$

$$= \cancel{\cos^2\gamma} - 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2 + \cancel{\sin^2\gamma}$$

$$= 1 - 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \cos\gamma \pm \sqrt{\cos^2\gamma - 1}$$

$$= \cos\gamma \pm i\sqrt{1 - \cos^2\gamma}$$

$$= \cos\gamma \pm i\sin\gamma \qquad \in \mathbb{C}$$

Keine reellen Nullstellen für $\gamma \neq 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

// Bem. passt zu unserer bisherigen Interpretation:
die reellen Nullstellen (damit auch reellen EW)
sind $1, -1, 1, -1, \ldots$

d.h. Identität und Spiegelung
(Drehung um $0°$) (Drehung um $180° \hat{=} \pi$)

2. Schritt : Bestimmung der Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ_i

zu erfüllende Gleichung (nach Def.) : $A\lambda = \lambda v$

$\Rightarrow$ Löse homogenes LGS $(A - \lambda_i E)v = 0$

Jede Lösung $v \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i

Die Lösungsmenge $U_{\lambda_i} := \{ v \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda E)v = 0 \}$

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ_i

Die Dimension dieses Eigenraums $\dim(U_{\lambda_i})$ heißt

geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 1$ sind Eigenwerte

Löse $(A - \lambda E)v = 0$.

d.h. $\begin{pmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$

Gauß: $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{pmatrix} 5-7 & 8 \\ 1 & 3-7 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ hier steht ein homogenes LGS, d.h. mit rechter Seite $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung $U_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 4\mu \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$

insb. z.B. ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW $\lambda_1 = 7$.

d.h. in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ „streckt" die Abb. die durch A beschrieben ist, um Faktor 7

$\lambda_2 = 1$ $$\begin{pmatrix} 5-1 & 8 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ -2\mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

insb. z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW $\lambda_2 = 1$.

<u>Satz</u>

a) Die geometrische Vielfachheit ist kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit.

b) Eigenvektoren $v_1, \dots, v_r$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind linear unabhängig.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda = 2$ ist doppelte Nullst. d. char. Polyn.
d.h. EW $\lambda = 2$ hat algebraische Vielfachheit $\underline{\underline{2}}$

U_2 ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow U_2 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Gerade,
insb. ist $\dim U_2 = 1$

d.h. die geom. Vielfachheit des EW $\lambda = 2$ ist $\underline{\underline{1}}$

Satz

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar (d.h. durch Koord.transformation entsteht eine Matrix in Diagonalgestalt), wenn

a) $\det(A - \lambda E)$ zerfällt in Linearfaktoren (geht im Komplexen immer)

b) für jeden Eigenwert ist die geom. Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.

Später genauer: Wir haben dann eine Basis aus Eigenvektoren gefunden, bzgl. dieser Basis stellt sich die darstellende Matrix „besonders einfach" dar.

§ 7 Orthonormalbasen und orthogonalen Matrizen

<u>Def.</u> Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion

$$F : V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt Bilinearform, falls

(B1) $F(v+v', w) = F(v,w) + F(v',w)$ // linear im 1. Argument
$F(\lambda v, w) = \lambda F(v,w)$

(B2) $F(v, w+w') = F(v,w) + F(v,w')$ // linear im 2. Argument
$F(v, \lambda w) = \lambda F(v,w)$

für alle $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Eine Bilinearform heißt <u>symmetrisch</u>, falls

(S) $F(v,w) = F(w,v)$ für alle $v,w \in V$

Eine symmetrische Bilinearform heißt <u>Skalarprodukt</u>, falls sie <u>positiv definit</u> ist, d.h.

(P) $F(v,v) \geq 0$ und $F(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

<u>Beispiel</u>

1. Das Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$
$$= v^T w$$

erfüllt (B1), (B2), (S), (P)

z.B. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \underline{4} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{2} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

$$10 = 4 + 6$$

2. $F(v,w) = v^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} w$ erfüllt (B1), (B2), (S), (P)

und definiert damit ein Skalarprodukt.

<u>Def.:</u>

Für $v \in \mathbb{R}^n$ heißt

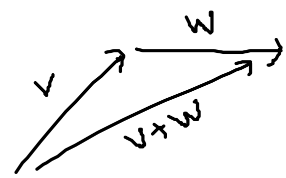
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

heißt <u>Länge</u> oder <u>Betrag</u> von v.

<u>Eigenschaften</u>

1. Dreiecksungleichung

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



2. Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU)

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Wegen der CSU gilt für $v \neq 0$, $w \neq 0$

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

und deswegen gibt es genau einen Winkel γ mit $0 \leq \gamma \leq \pi$ mit

$$\cos \gamma = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

$\Rightarrow$

<u>Definition</u>:

Für $v, w \neq 0$ nennt man

$$\sphericalangle(v,w) := \gamma = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

den <u>Winkel</u> zwischen v und w.

// Motivation: Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen, Projektionen, etc. verstanden, Drehungen passen noch nicht gedanklich in unser Eigenwert/Eigenvektor-Konzept.