Do (Himmelfahrt) keine Übungen, bitte auf Fr verteilen
(= die Freitagsübungen finden statt)

Determinanten.

Wofür gut? (Anwendungen)

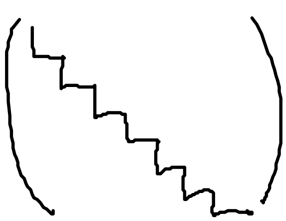
Für eine $n \times n$ Matrix A gilt

1) $\operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$
2) Spalten $a_1, \dots, a_n$ lin. unabhängig $\Leftrightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$
(genauso mit Zeilen)
3) $Ax = b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Berechnung der Determinante

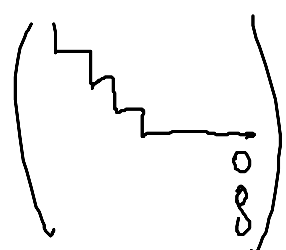
1. Gauß-Algorithmus

A auf Zeilenstufenform bringen

a) 

Diagonalmatrix

det A = Produkt d. Diagonalelemente

b) 

mit Nullzeilen

det A = 0

(!) Für jeden Zeilentausch muss man sich einen Vorzeichenwechsel merken.

z.B.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -(-18) = \underline{\underline{+18}}$$

2. Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Zeile und j-te Spalte gestrichen werden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

z.B. $$A = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 & 4 \\ 5 & \cancel{6} & 7 & 8 \\ \cancel{9} & \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \\ 13 & \cancel{14} & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

3. Zeile — 2. Spalte

Dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$ Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$ Entwicklung nach der i-ten Zeile

Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Entwicklung nach der ersten Spalte (d.h. $j=1$)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = +\overset{a_{11}}{1}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \overset{a_{21}}{0}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\overset{a_{31}}{2}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \overset{a_{41}}{3}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Merkregel für das Vorzeichen („Schachbrettmuster")

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

b) Entwicklung nach 2. Zeile

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= 0$ //

(erste enthält diese Rechnung Rechenfehler)

Bemerkung

- es ist egal, nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, am Ende kommt immer $\det A$ heraus (hier zufällig 0)
- Entwicklung lohnt sich an, wenn eine Zeile / Spalte „viele" Nullen enthält.

3. Regel von Sarrus (nur für 3×3 Matrizen)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - \ + & + & + \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Kann man verallgemeinern auf Matrizen mit mehr Zeilen / Spalten

$\longrightarrow$ Leibniz-Formel.

(aber nur der 3×3 Spezialfall ist von praktischem Interesse)

4) Cramers Regel (zum Lösen von LGS)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (!) Dann gilt für die (eindeutige!) Lösung x von $Ax = b$:

$$x_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, \underbrace{b}_{j\text{-te Spalte}}, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det A} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det A \neq 0 \rightarrow A$ invertierbar $\rightarrow$ Cramers Regel anwendbar

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

§6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Im Folgenden müssen wir komplexe Zahlen zulassen. Alles was wir bisher gemacht haben, gilt auch für komplexe Matrizen. Deswegen schreiben wir statt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auch manchmal $\mathbb{K}$

z.B. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Beispiel LGS

$$\begin{aligned} 2z_1 + iz_2 &= 1 \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 &= 0 \end{aligned}$$

ist LGS in komplexen Zahlen $Az = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 2-2i - i(1+i) \\ &= 2-2i - i + 1 \end{aligned} = 3-3i$$

Lösung des LGS $Az=b$ mit Cramers Regel:

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1-i \end{vmatrix}}{3-3i} = \frac{1-i}{3-3i} = \frac{1}{3} \qquad \left(= \frac{1}{3} + 0i \right)$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1+i & 0 \end{vmatrix}}{3-3i} = -\frac{1+i}{3-3i} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{3}\frac{(1+i)^2}{2} = -\frac{i}{3}$$

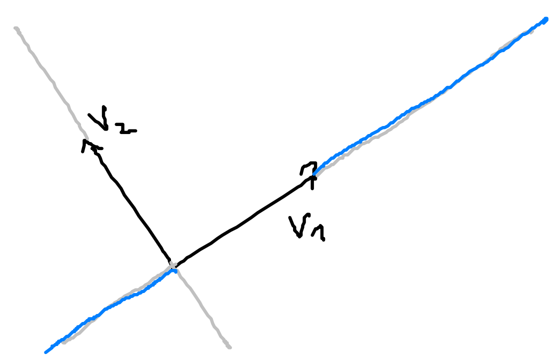
Def.:
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Av = \lambda v \qquad \text{// A „streckt } v \text{ um } \lambda\text{"}$$

Jeder Vektor $v \neq 0$, der diese Gleichung erfüllt, heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Bsp.

1) Orthogonale Projektion π auf eine Gerade (Bsp. letzte Woche)



$\pi(v_1) = 1 \cdot v_1$
$\pi(v_2) = 0 \cdot v_2$

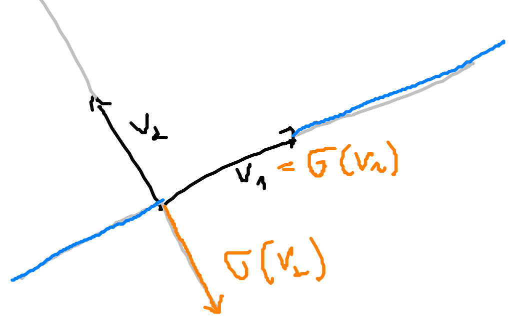
d.h. $\lambda = 1$ und $\lambda = 0$ sind Eigenwerte
zug. Eigenvektoren sind v_1 und v_2.

Die Matrix zu π (bzgl. Basis v_1, v_2) ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Orthogonale Spiegelung σ an einer Geraden

$\sigma(v_1) = 1 \cdot v_1$

$\sigma(v_2) = -1 \cdot v_2$



$\Rightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$
Eigenvektoren (z.B.) sind v_1 und v_2

zu σ geh. Matrix bzgl. Basis v_1, v_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beobachtungen

- beide Male „besonders einfache" Darstellung von A bzgl. „geeignet gewählter" Basis (nämlich A hat Diagonalgestalt)
- Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren.

Ziel

Berechnung einer Basis aus Eigenvektoren (wenn es eine gibt)

1. Schritt Eigenwerte berechnen

λ Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow \quad Av = \lambda v$ für einen Vektor $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)v = 0$ hat eine Lösung $v \neq 0$

E: Einheitsmatrix $n \times n$

$\Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$

$\Leftrightarrow \quad \det \boxed{(A - \lambda E) = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = \lambda \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom n-ten Grades in λ

im Bsp. $(1-\lambda)(-1-\lambda)$

heißt <u>charakteristisches Polynom von A</u>

Dessen Nullstellen (denn $\det(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0$) sind die gesuchten Eigenwerte.