

Do (Himmelfahrt) keine Übungen, bitte auf Fr verteilen
(= die Freitagsübungen finden statt)

Determinanten.

Wohin gut? (Anwendungen)

Für eine $n \times n$ Matrix A gilt

1) $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

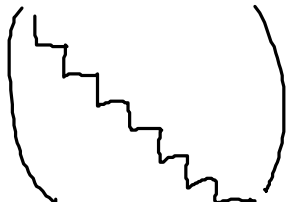
2) Spalten a_1, \dots, a_n lin.-unabhängig $\Leftrightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$
(genauso mit Zeilen)

3) $Ax = b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

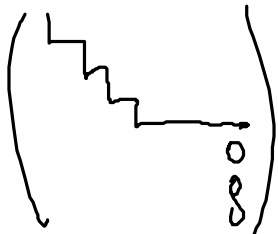
Berechnung der Determinante

1. Gauß-Algorithmus

A auf Zeilenstufenform bringen

a) 

Diagonalmatrix
 $\det A = \text{Produkt d. Diagonalelemente}$

b) 

mit Nullzeilen
 $\det A = 0$

Ⓛ Für jeden Zeilentausch muss man sich einen Vorzeichenwechsel merken.

z.B. $\det \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\updownarrow \\ \updownarrow}} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$= -(-18) = \underline{\underline{+18}}$$

2. Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn die i -te Zeile und j -te Spalte gestrichen werden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

3. Zeile
2. Spalte

Dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Entwicklung nach der j -ten Spalte

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Entwicklung nach der i -ten Zeile

Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Entwicklung nach der ersten Spalte (d.h. $j=1$)

$$\det \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ \underline{2} & 1 & 3 & 2 \\ \underline{3} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \overset{a_{11}}{+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \overset{a_{21}}{0} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ + \overset{a_{31}}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \overset{a_{41}}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ = 0 //$$

Merke regel für das Vorzeichen („Schachbrettmuster“)

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

b) Entwicklung nach 2. Zeile

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 //$$

(erk enthält diese Rechnung Rechenfehler)

Bemerkung

- es ist egal, nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt, am Ende kommt immer $\det A$ heraus (hier zufällig 0)
- Entwicklung lohnt sich an, wenn eine Zeile / Spalte "viele" Nullen enthält.

3. Regel von Sarrus (nur für 3×3 Matrizen)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

Kann man verallgemeinern auf Matrizen mit mehr Zeilen / Spalten
→ Leibniz-Formel.

(aber nur der 3×3 Spezialfall ist von praktischem Interesse)

4) Cramers Regel (zum Lösen von LGS)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar (!) Dann gilt für die (eindeutige) Lösung x von $Ax = b$;

$$x_j = \frac{\det(a_{11}, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{nn})}{\det A}$$

↑
j-te Spalte

für $j=1, \dots, n$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det A \neq 0 \rightarrow A$ invertierbar \rightarrow Cramers Regel anwendbar

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

§6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Im Folgenden müssen wir komplexe Zahlen zulassen. Alles was wir bisher gemacht haben, gilt auch für komplexe Matrizen

Deswegen schreiben wir statt \mathbb{R} oder \mathbb{C} auch manchmal \mathbb{K}
z.B. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Beispiel LGS

$$\begin{aligned} 2z_1 + iz_2 &= 1 \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 &= 0 \end{aligned}$$

ist LGS in komplexen Zahlen
 $Az = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 2 - 2i - i(1+i) \\ &= 2 - 2i - i + 1 = 3 - 3i \end{aligned}$$

Lösung des LGS $Az = b$ mit Cramers Regel:

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1-i \end{vmatrix}}{3-3i} = \frac{1-i}{3-3i} = \frac{1}{3} \quad (= \frac{1}{3} + 0i)$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1+i & 0 \end{vmatrix}}{3-3i} = -\frac{1+i}{3-3i} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+i)^2}{2} = -\frac{i}{3}$$

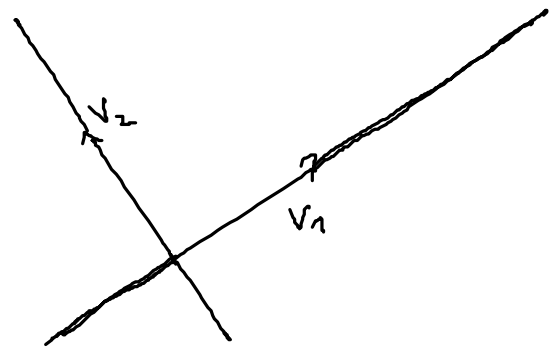
Def.
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$,
wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Av = \lambda v \quad // A \text{ "streckt" } v \text{ um } \lambda$$

Jeder Vektor $v \neq 0$, der diese Gleichung erfüllt, heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Bsp.

1) Orthogonale Projektion π auf eine Gerade (Bsp. leberk Waale)



$$\pi(v_1) = 1 \cdot v_1$$

$$\pi(v_2) = 0 \cdot v_2$$

d.h. $\lambda = 1$ und $\lambda = 0$ sind Eigenwerte
zug. Eigenvektoren sind v_1 und v_2 .

Die Matrix zu π (bzgl. Basis v_1, v_2) ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

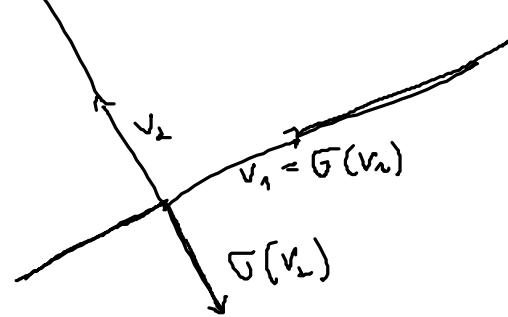
2) Orthogonale Spiegelung σ an einer Geraden

$$\sigma(v_1) = 1 \cdot v_1$$

$$\sigma(v_2) = -1 \cdot v_2$$

⇒ Eigenwerte sind $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$
Eigenvektoren (z.B.) sind v_1 und v_2

zu σ geh. Matrix bzgl. Basis v_1, v_2



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beobachtungen

- beide Male "besonders einfache" Darstellung von A bzgl. "geeignet gewählter" Basis (nämlich A hat Diagonalgestalt)
- Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren.

Ziel

Berechnung einer Basis aus Eigenvektoren (wenn es eine gibt)

1. Schritt Eigenwerte berechnen

λ Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda v \quad \text{für einen Vektor } v \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0 \quad \text{hat eine Lösung } v \neq 0$$

↑ Einheitsmatrix $n \times n$

$$\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda E) < n$$

$$\Leftrightarrow \det \boxed{(A - \lambda E) = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = \lambda \cdot v$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v}_v$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom n -ten Grades in λ
im Bsp. $(1-\lambda)(-1-\lambda)$

↑ heißt charakteristisches Polynom von A

Dessen Nullstellen (denn $\det(A - \lambda E) \stackrel{!}{=} 0$) sind die gesuchten
Eigenwerte.