Thema: Koordinatenwechsel bei linearen Abb.

Ziel: Beschreibe eine lin. Abb. φ mit möglichst „einfacher" Matrix A
d.h. in möglichst einfachem Koordinatensystem.

Bild

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \quad V \arrow[r, "\varphi"', "A"] & W \quad \mathcal{C} \\
\mathcal{B}' \quad V \arrow[u, "S"'] \arrow[r, "\varphi", "A'"'] & W \quad \mathcal{C}' \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Basis des W

Basis des V (z.B. Standardbasis)

2 Vektorräume
φ lin. Abb.
(z.B. Projektion φ von $\underset{=V}{\mathbb{R}^3}$ nach $\underset{=W}{\mathbb{R}^2}$)

φ eindeutig beschrieben
Darstellung A, A' basisabhängig

S Transformations: überführt Koord. bzgl. $\mathcal{B}'$ in Koord. bzgl. $\mathcal{B}$

$$A = \downarrow S^{-1} \xrightarrow{A'} \uparrow R$$

„$\Rightarrow$" $$A = R \cdot A' \cdot S^{-1}$$

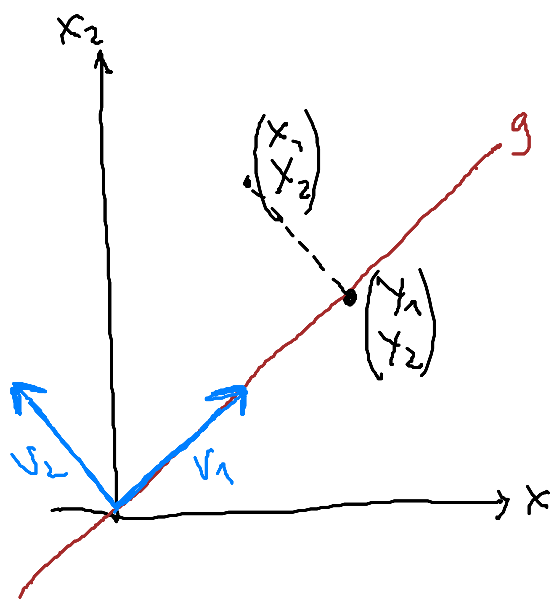
$$A' = \uparrow S \xrightarrow{A} \downarrow R^{-1}$$

„$\Rightarrow$" $$A' = R^{-1} \cdot A \cdot S$$

<u>Bsp.</u>

Betrachte Projektion φ auf die Gerade g

$$g: \ x_1 - x_2 = 0$$



Betrachte Basis

$$\mathcal{B}': \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Projektion / Bilder d. Basisvektoren bzgl. Basis $\mathcal{B}$ (Standardbasis)

$\Rightarrow$ φ wird bzgl. $\mathcal{B}'$ beschrieben durch

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalten: Bilder der Basis $\mathcal{B}'$ bzgl $\mathcal{B}'$, d.h.

$$\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$
$$\varphi(v_2) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$

Frage: Wie sieht die zu φ gehörige Matrix A aus (d.h. wie wird diese Projektion bzgl der Standardbasis $\mathcal{B}$ dargestellt?)

D.h. benötigt Transformationsmatrix S

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi"', "A\,?"] & \mathbb{R}^2\ \mathcal{B} \\
\mathbb{R}^2\ \mathcal{B}' \arrow[u, "S"] \arrow[r, "\varphi", "A'\,\checkmark"'] & \mathbb{R}^2\ \mathcal{B}' \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

Spalten von S enthalten Koord. der Basisvektoren in $\mathcal{B}'$ bzgl. $\mathcal{B}$, d.h.

$$S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \ \ v_1 \quad v_2 \end{array}$$

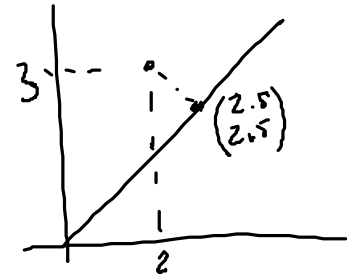
$$A = \downarrow S^{-1} \xrightarrow[A']{} \uparrow S$$

$$= S \cdot A' \cdot S^{-1}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

„Probe"



$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix}$$

Merke: Koordinatenwechsel soll Rechnungen vereinfachen

Gesucht: besonders einfache" Darstellungen sind durch
„ Diagonalmatrix

Definition

Zwei $n \times n$ Matrizen A, B heißen ähnlich, falls es eine invertierbare $n \times n$ Matrix S gibt mit

$$\boxed{B = S^{-1} A \cdot S}$$

/nächstes Kapitel

Ziel: Finde zu gegebener lin. Abb. φ unter allen zur bzgl. einer Basis beschreibenden Matrix A eine ähnliche Matrix möglichst „einfache" Gestalt.

§5 Determinanten

Definition

Eine Abbildung $\Delta : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Determinantenabbildung, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(D1) $\Delta(A)$ hängt linear von jeder Spalte von A ab, d.h. für
$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$
Spalten von A

a) $\Delta(\cdots, a_i + a_i', \cdots) = \Delta(\cdots, a_i, \cdots) + \Delta(\cdots, a_i', \cdots)$

b) $\Delta(\cdots, \lambda a_i, \cdots) = \lambda \Delta(\cdots, a_i \cdots)$

z.B. $\Delta\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

+

(D2) Sind zwei Spalten aus A identisch, ist $\Delta(A) = 0$

(D3) $\Delta(E) = 1$
Einheitsmatrix

<u>Satz</u> (Hauptsatz der Theorie der Determinanten)
Es <u>existiert</u> eine Abb mit (D1) – (D3) und sie ist <u>eindeutig</u>.
Man nennt sie die <u>Determinante von A</u>, $|A|$, $\det A$

<u>Eigenschaften der Determinante</u>

(D4) $\det A^T = \det A$

(D5) Hat A eine Spalte nur aus Nullen ist $\det A = 0$

(D6) Addition eines skalaren Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte ändert die Determinante <u>nicht</u>

(D7) Vertauschen zweier Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante

z.B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$

D8 Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

z.B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$

allg. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

D9 $\det A \neq 0 \iff A$ invertierbar

D10 Produktsatz: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix}}_{4} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{-2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{-2} \quad \checkmark$$

D11 Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

z.B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$\overset{\shortparallel}{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{\det A}$$

D12 $\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$

z.B. $\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Bemerkungen

a) ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante, denn

$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S$$

$$\det A = \det(S^{-1} \cdot B \cdot S) = \det S^{-1} \cdot \det B \cdot \det S$$
$$= \cancel{\frac{1}{\det S}} \cdot \det B \cdot \cancel{\det S} =$$
$$= \det B$$

b) In der Regel falsch ist $\det(A+B) = \det A + \det B$!

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 + 0 \neq 1$$

Berechnung von Determinanten

① Gauß-Elimination

Bsp.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot (-3) = -18$$

Achtung: Bei Zeilentausch wechselt das Vorzeichen der Determinante (jedes Mal!)