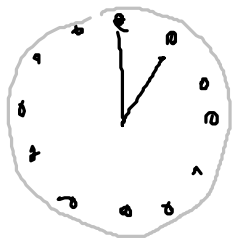


• Fehlende Klausur-Boni bitte diese Woche per Email an Katja Kulas (Ergebnisse gehen nächste Woche an Studienbüros)

• Aufzeichnung der VL voraussichtlich ab nächster Woche



bedeutet



Thema: Lineare Abbildungen $\varphi: V \rightarrow W$, d.h.

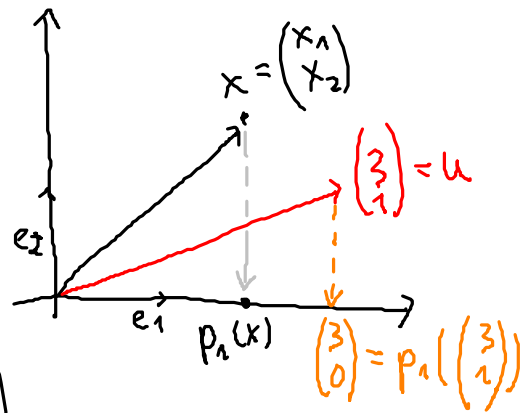
$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad , \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, a, b \in V$$

Bsp: Projektion $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-te Komponente

Beim letzten Mal: Jede lin. Abb. hat Darstellung mit Matrix A

$$y = A \cdot x$$

enthält in den Spalten die Bilder der Basisvektoren.



z.B. Standardbasis im 2-dim: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

wird auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ projiziert

$$p_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_1(e_2)$

$$p_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Abbildungsmatrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\swarrow
 $p_1(e_1)$

$$p_1(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel (Darstellungswechsel, Koordinatenwechsel)

Motivation: Je nach Anwendungsfall ist die Darstellung in bestimmten Koordinaten einfacher als in anderen

Bsp. 3dhn Koord. im Raum vs. (Unsinvoll)
 2dhn Koord. auf Erdoberfläche (sinnvoll)

Beob.

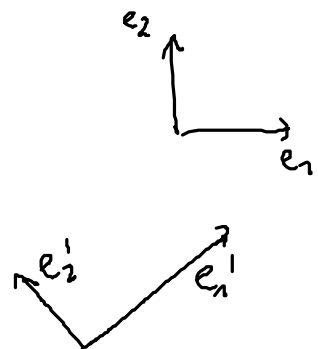
- Die Definition einer lin. Abb. φ ist unabh. von einer Basis
 "drehe um 45° "
- Die Darstellung ist dagegen abh. von der gewählten Basis
 "Drehung der Erde um 90° ist 'einfach' in Kugelkoordinaten zu beschreiben und 'schwierig' in Kartesischen"

Frage: Wie ändert sich die darstellende Matrix A bei einem Wechsel der Basis (d.h. des Koordinatensystems)?

Motivation im \mathbb{R}^2

Sei $B = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis

Sei $B' = \{e'_1, e'_2\}$ eine andere Basis



Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig und habe

Darstellung bzgl. e_1, e_2 als

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

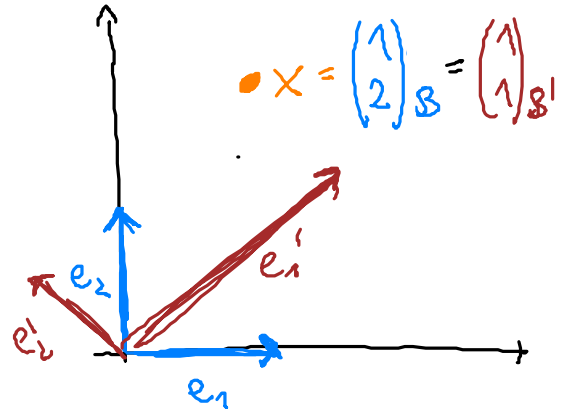
Kurz: $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

und bzgl. e'_1, e'_2 die Darstellung

(*)

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$$

Kurz $[x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$

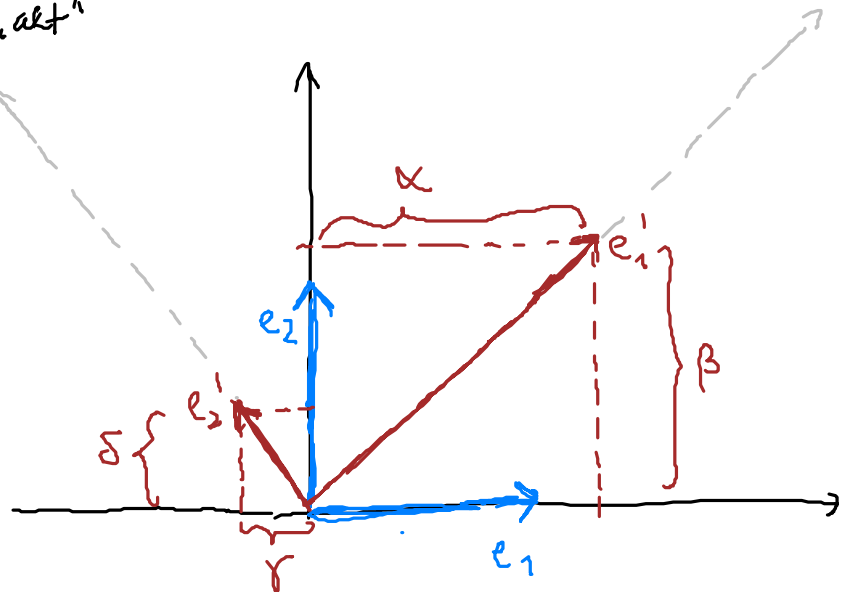


Frage:

Wie hängen x'_1, x'_2 von x_1, x_2 ab?
"neu" "alt"

Dazu stellen wir e'_1, e'_2 durch e_1, e_2 dar

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 \\ e'_2 &= \gamma \cdot e_1 + \delta \cdot e_2 \end{aligned}$$



Darstellung der neuen Basis in alten Koordinaten

Einsetzen in (*)

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$$

$$= x'_1 (\alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2) + x'_2 (\gamma \cdot e_1 + \delta \cdot e_2)$$

Für $v \in V$ seien

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

die Koordinaten bzgl. \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' .

Sei $S = (s_{ij})$ die Transformationsmatrix, die man erhält, indem man jedes v'_j durch v_1, \dots, v_n ausdrückt

(Darstellung der neuen Basis \mathcal{B}' in "alten" Koordinaten, d.h. bzgl. \mathcal{B})

$$\text{d.h.} \quad v'_j = s_{1j} \cdot v_1 + s_{2j} \cdot v_2 + \dots + s_{nj} \cdot v_n$$

(das ergibt j -te Spalte von S)

$$\text{d.h.} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nj} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \swarrow$
 $[v'_1]_{\mathcal{B}} \quad [v'_j]_{\mathcal{B}} \quad [v'_n]_{\mathcal{B}}$

// im Bsp. oben

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

\uparrow
1. neuer Basisvekt.,
ausgedrückt in
"alten" Koord.

und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Satz

Sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und S die zugehörige Transformationsmatrix (wie oben),

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W und R die zugehörige Transformationsmatrix

Sei A die Matrix zu φ bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C}

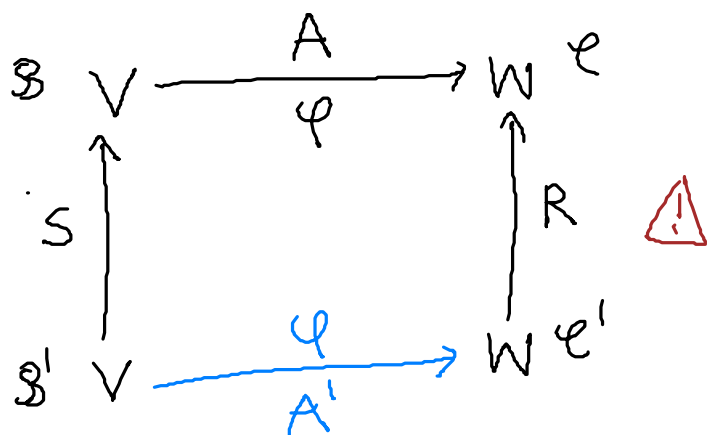
Dann gilt für die Matrix A' zu φ bzgl. \mathcal{B}' und \mathcal{C}'

$$A' = R^{-1} \cdot A \cdot S$$

bzw.

$$A = R \cdot A' \cdot S^{-1}$$

Man liest also
Matrixmultiplikationen
wie Hintereinander-
ausführung von Funktionen
"von rechts nach links", so
wie
erst S , dann A , dann R^{-1}



$$\begin{array}{c} \xrightarrow[A']{\varphi} \\ = \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow S & \xrightarrow[A]{} \\ & & \downarrow R^{-1} \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow[A]{} & = & \downarrow S^{-1} \\ & & \xrightarrow[A']{} \\ & & \uparrow R \end{array} \right.$$

Beispiele

1. Betrachte die Basen $\mathcal{B}: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\mathcal{B}' \quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{im } \mathbb{R}^2$$

Betrachte $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \mathcal{B}.$$

Aufgabe: Bestimme Matrix A' von φ bzgl. \mathcal{B}'

Transformationsmatrix

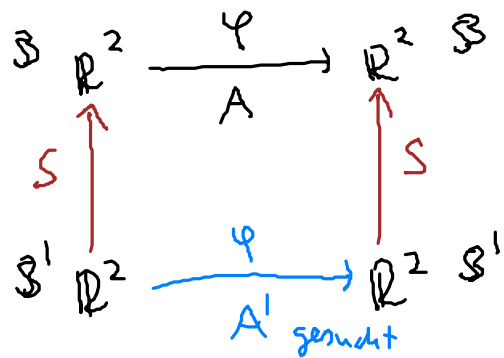
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1' & e_2' \end{matrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A' &= S^{-1} \cdot A \cdot S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachte: Bzgl. \mathcal{B}' stellt sich φ „viel einfacher“ dar.

Def. Matrizen, deren Einträge nur auf der (Haupt-)Diagonalen a_{ii} von Null verschieden sind, heißen Diagonalmatrizen



$$\begin{pmatrix} \kappa & & & \\ & \kappa & & \\ & & \kappa & \\ & & & \ddots \\ & & & & \kappa \end{pmatrix}.$$