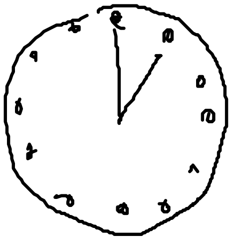
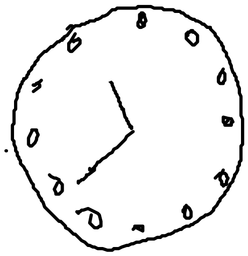
- Fehlende Klausur-Boni bitte <u>diese Woche</u> per Email an Katja Kulas (Ergebnisse gehen nächste Woche an Studienbüros)
- Aufzeichnung der VL voraussichtlich ab nächster Woche



bedeutet



Thema: Lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$, d.h.

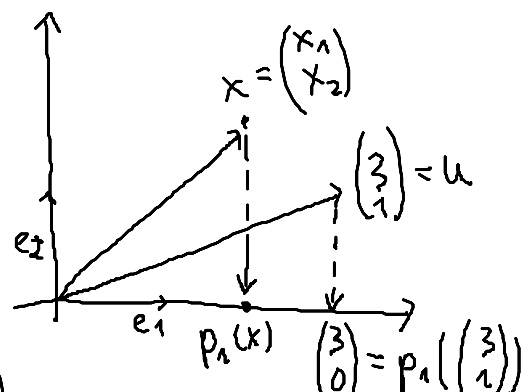
$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ a,b \in V$$

<u>Bsp.:</u> Projektion $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $p_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Komponente

Beim letzten Mal: Jede lin. Abb. hat Darstellung mit Matrix A

$$y = A \cdot x$$

enthält in den Spalten die Bilder der Basisvektoren.



z.B. Standardbasis im 2-dim: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

wird auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ projiziert

$$p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_1(e_2)$

$\Rightarrow$ Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$p_1(e_1)$

$$p_1(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel (Darstellungswechsel, Koordinatenwechsel)

Motivation: Je nach Anwendungsfall ist die Darstellung in bestimmten Koordinaten einfacher als in anderen

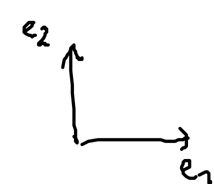
Bsp. 3 dim Koord im Raum vs. (Unsinn)
2 dim Koord. auf Erdoberfläche (sinnvoll)

Beob.

- Die Definition einer lin. Abb. φ ist unabh. von einer Basis
  "drehe um 45°"
- Die Darstellung ist dagegen abh. von der gewählten Basis
  "Drehung der Erde um 90° ist „einfach" in Kugelkoordinaten zu beschreiben und „schwierig" in Kartesischen"

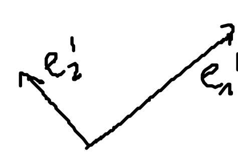
Frage: Wie ändert sich die darstellende Matrix A bei einem Wechsel der Basis (d.h. des Koordinatensystems)?

Motivation im $\mathbb{R}^2$



Sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis

Sei $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2'\}$ eine andere Basis



Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig und habe

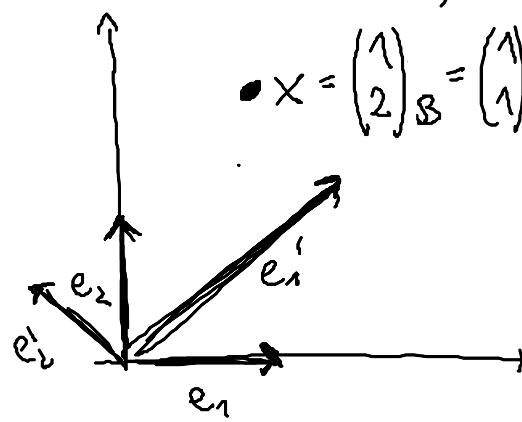
Darstellung bzgl. e_1, e_2 als

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad \text{Kurz: } [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und bzgl. e_1', e_2' die Darstellung

$$(*) \qquad \boxed{x = x_1' e_1' + x_2' e_2'} \qquad \text{Kurz } [x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

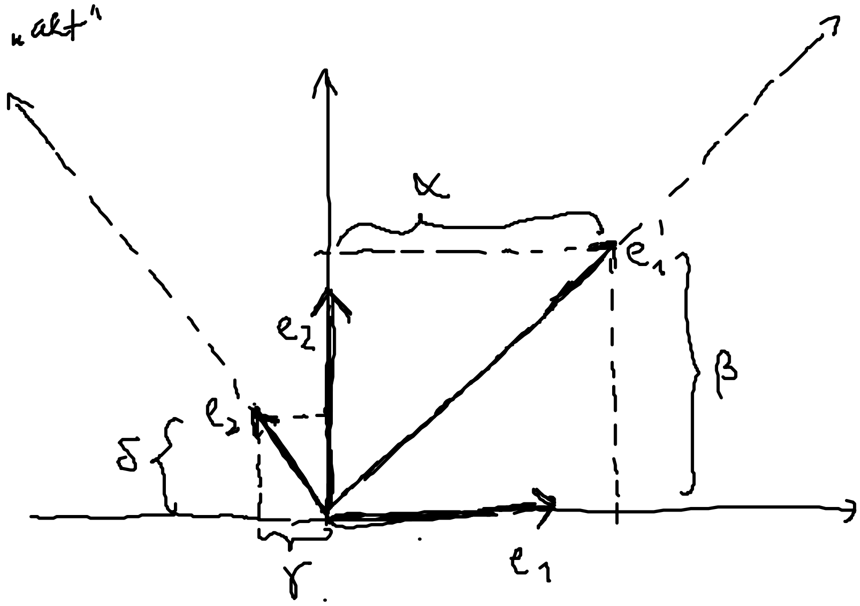
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$



Frage!
Wie hängen x_1', x_2' von x_1, x_2 ab?
„neu" „alt"

Dazu stellen wir e_1', e_2' durch e_1, e_2 dar

$$\boxed{\begin{aligned} e_1' &= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 \\ e_2' &= \gamma \cdot e_1 + \delta \cdot e_2 \end{aligned}}$$



Darstellung der neuen Basis in alten Koordinaten

Einsetzen in (*)

$$x = x_1' e_1' + x_2' e_2'$$
$$= x_1'(\alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2) + x_2'(\gamma \cdot e_1 + \delta \cdot e_2)$$

$$\overset{\text{zus.}}{\underset{\text{fassen}}{=}} \underbrace{(x_1' \cdot \alpha + x_2' \cdot \gamma)}_{x_1} \cdot e_1 + \underbrace{(x_1' \cdot \beta + x_2' \cdot \delta)}_{x_2} \cdot e_2$$

= Darstellung in den Koordinaten der „alten" Basis $\{e_1, e_2\}$

Sei $S := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ $\quad$ S heißt <u>Transformationsmatrix</u>

Damit lassen sich Koordinaten bzgl $\{e_1', e_2'\}$ umrechnen in Koordinaten bzgl. $\{e_1, e_2\}$:

$$(**) \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}$$

Kurz: $[x]_{\mathcal{B}} = S \cdot [x]_{\mathcal{B}'}$

/ in den Spalten von S stehen die Koordinaten (bzgl. $\mathcal{B}$) der neuen Basisvektoren e_1', e_2'

Beobachtung (nochmal)

Die Spalten sind Koordinaten der neuen <u>Basis</u>vektoren und damit linear unabhängig.

$\Rightarrow$ S ist invertierbar

$$(**) \Rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Kurz: $[x]_{\mathcal{B}'} = S^{-1} [x]_{\mathcal{B}}$

<u>Der allgemeine Fall</u>

Seien $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$\mathcal{B}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$

zwei Basen eines n-dimensionalen Vektorraums V

Für $v \in V$ seien

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

die Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$.

Sei $S = (s_{ij})$ die Transformationsmatrix, die man erhält, indem man jedes v_j' durch $v_1, \dots, v_n$ ausdrückt
(Darstellung der neuen Basis $\mathcal{B}'$ in „alten" Koordinaten, d.h. bzgl. $\mathcal{B}$),

d.h. $v_j' = s_{1j} v_1 + s_{2j} \cdot v_2 + \dots + s_{nj} v_n$
(das ergibt j-te Spalte von S)

d.h.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [v_1']_{\mathcal{B}} & [v_j']_{\mathcal{B}} & [v_n']_{\mathcal{B}} \end{array}$$

// im Bsp. oben

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ 1. neuer Basisvek. ausgedrückt in „alten" Koord.

und $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}$ und $\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

Satz

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und S die zugehörige Transformationsmatrix (wie oben),

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W und R die zugehörige Transformationsmatrix

Sei A die Matrix zu φ bzgl $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$

Dann gilt für die Matrix A' zu φ bzgl. $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$

$$\boxed{A' = R^{-1} \cdot A \cdot S} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{A = R \cdot A' \cdot S^{-1}}$$

man liest also Matrixmultiplikationen wie Hintereinander-ausführung von Funktionen „von rechts nach links", so wie erst S, dann A, dann R^{-1}

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\ V \arrow[r, "A", "\varphi"'] & W\ \mathcal{C} \\
\mathcal{B}'\ V \arrow[u, "S"] \arrow[r, "\varphi", "A'"'] & W\ \mathcal{C}' \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow[A']{\varphi} \;=\; \uparrow S \xrightarrow{A} \downarrow R^{-1} \qquad \Big| \qquad \xrightarrow[A]{\varphi} \;=\; \downarrow S^{-1} \xrightarrow[A']{} \uparrow R$$

Beispiele

1. Betrachte die Basen $\mathcal{B}: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{B}'$ $\quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$

Betrachte $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \mathfrak{B}.$$

<u>Aufgabe</u>: Bestimme Matrix A' von φ bzgl. $\mathfrak{B}'$

Transformationsmatrix

$$S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \;\; e_1' \;\; e_2' \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}\;\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi", "A"'] & \mathbb{R}^2\;\mathfrak{B} \\
\mathfrak{B}'\;\mathbb{R}^2 \arrow[u, "S"] \arrow[r, "\varphi", "A'\text{ gesucht}"'] & \mathbb{R}^2\;\mathfrak{B}' \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beachte: Bzgl. $\mathfrak{B}'$ stellt sich φ „viel einfacher" dar.

<u>Def.</u> Matrizen, deren Einträge nur auf der (Haupt-) Diagonalen a_{ii} von Null verschieden sind, heißen <u>Diagonalmatrizen</u>

$$\begin{pmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & * \end{pmatrix}.$$