Klausureinsicht für absolute Notfälle: Morgen (Mittwoch) 14.00
im 54|10-13

Freitags sind zwei der 8.00-Übungen gestrichen und andere Termine verstärkt worden → Webseite

Bisher: Lösen LGS $\underbrace{A}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}\overbrace{x}^{\in\mathbb{R}^n}=b\in\mathbb{R}^m$

Diese Matrix-Multiplikation ist Spezialfall von $\underbrace{A}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}\cdot\overbrace{B}^{\in\mathbb{R}^{n\times p}}=C\in\mathbb{R}^{m\times p}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} & \begin{pmatrix} 31 & -7 \\ 28 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

i.A. $A\cdot B \neq B\cdot A$

Inverse A^{-1} von A: $A\cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{E \text{ (Einheitsmatrix)}} = A^{-1}\cdot A$

vergleichbar z.B. mit – multiplikativen Inversen $4\cdot\frac{1}{4} =$
$4\cdot 4^{-1} = 1$

– additives Inverses: $3+(-3)=0$

– Umkehrfunktion $f^{-1}(f(x))=x$

Berechnen der Inversen

Sei $A = (a_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ Matrix

(Bem. Genau die Matrizen sind invertierbar die $\operatorname{rang}(A) = n$ haben)

Zu berechnen: Inverse $B = (b_{ij})$

D.h. wir suchen B mit $A \cdot B = E$, d.h.

$$(A b_1 \;\; \underbrace{A b_2 \;\; A b_3}_{\text{3. Spalte von } B} \cdots A b_n) \stackrel{!}{=} (e_1 \;\; \underbrace{e_2}_{\text{2. Einheitsvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \cdots e_n)$$

D.h. zu lösen sind viele LGS:

$$A b_1 = e_1 \qquad A b_2 = e_2 \qquad \ldots \qquad A b_n = e_n$$

Alle n LGS haben ident. Koeff.-matrix, mit unterschiedl. rechten Seiten

Man löst alle n LGS simultan mit Gauß-Algorithmus

Bsp. gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ gesucht}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \left(A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \;\; A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \right) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die zwei LGS sind

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeff.-matrizen sind

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)$$

bis hier ganz normaler Gauß

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \mathrm{I} - 3\,\mathrm{II}$$

---

erzeuge jetzt links Einheitsmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Nochmal:

gegeb. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; \mathrm{II} - 3\mathrm{I}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \; \mathrm{II} - \mathrm{III}$$

$$\to \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \; \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Einheitsmatrix → fertig

ist gesuchte A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

weitere Anwendung der Inversen:
Lösen von vielen LGS mit verschiedenen rechten Seiten

$$A x_1 = b_1 \qquad A x_2 = b_2 \qquad A x_3 = b_3 \qquad \ldots \qquad A x_n = b_n$$

Beobachtung: Ist A invertierbar, d.h. $\operatorname{rang}(A) = n$, so ist Lösung des LGS $Ax = b$ eindeutig, nämlich

$$Ax = b$$
$$\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$\Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Bem. $A^{-1}b$ ist Matrix-Vektormult, und damit „viel billiger" (in Anzahl Rechenoperationen) als Gaußalgorithmus

Damit lassen sich obige LGS lösen

$$x_1 = A^{-1}b_1 \quad \dots \quad x_n = A^{-1}b_n$$

Bsp oben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(Bem. Tatsächlich benutzt man nicht die Inverse, sondern sog. Zerlegungen von A, das ist numerisch stabiler)

§4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition Sei V, W zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$.
Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt <u>linear</u>, falls

(L1) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \forall v, w \in V$

(L2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Beispiele

1. Die Nullabbildung $0 : V \to W$ mit $0(v) = 0$
2. Die Projektion $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x) = x_i$ (i-te Komponente von x)
3. Die Abbildung

$$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{mit} \qquad f \in \underbrace{C^0([a,b])}_{\text{Menge der auf } [a,b] \text{ stetigen Funktionen}}$$

Grund: (L1), (L2) nachrechnen:

(L1): $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(L2) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

4. Für jede beliebige $m \times n$ Matrix A ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = Ax$$

linear.

(L1), (L2):
$$(A+B)x = Ax + Bx$$
$$\lambda(Ax) = A(\lambda x)$$

Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen

Satz.

Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es bzgl. der Standardbasis eindeutig bestimmte Matrix A mit

$$\varphi(v) = \underbrace{A \cdot v}_{\in \mathbb{R}^m} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

Beweis

Setze $A = \left(\varphi(e_1) \; \varphi(e_2) \cdots \varphi(e_n) \right)$, d.h. j-te Spalte ist das Bild des j-ten Einheitsvektors, d.h. $\varphi(e_j)$

Dann gilt für belieb. $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

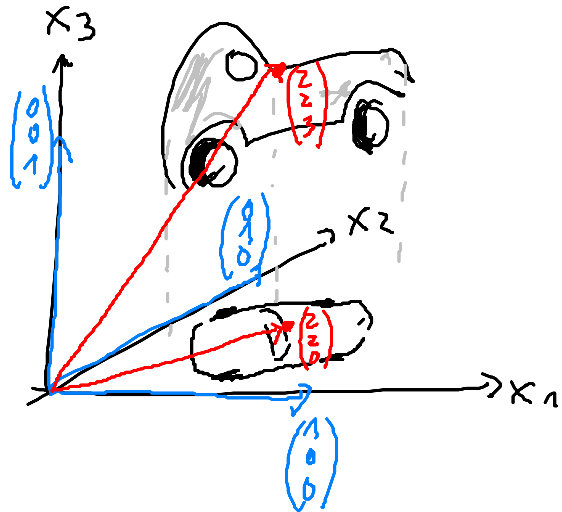
$$\begin{aligned}
\varphi(v) &= \varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) \\
&= \lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) && \text{// weil } \varphi \text{ linear} \\
&= \lambda_1 A e_1 + \lambda_2 A e_2 + \dots + \lambda_n A e_n && \text{// nach Def. von } A \text{ und } \varphi \\
&= A(\lambda e_1 + \lambda e_2 + \dots + \lambda e_n) && \text{// nach Rechengesetzen für Matrizen}
\end{aligned}$$

$$= Av$$

$\square$

Beispiele

Projektion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$



$$\varphi\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_2}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(v) = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A} v$$

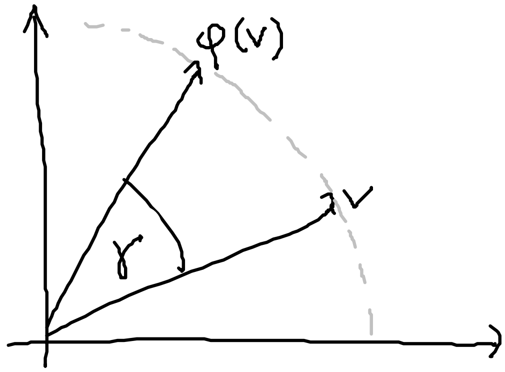
z.B. $v = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \varphi(v) = Av = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Weiteres Bsp.

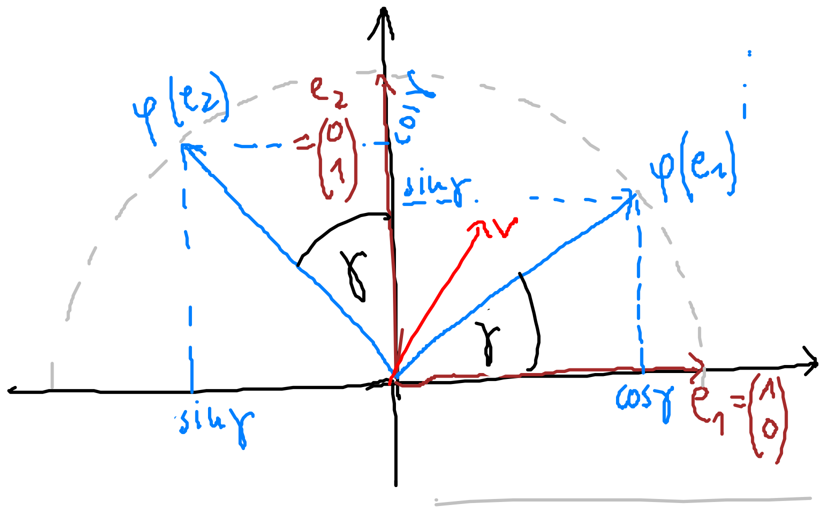
Rotation in der Ebene:

Betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Vektor v um den Winkel γ dreht

Nachrechnen: (L1), (L2) $\to$ φ ist linear (Übung!)



Zugehörige Matrix A



$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Also $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$.

d.h. Av beschreibt Drehung von v um γ.