Zur Montags-Raumsituation (ggf. VL-Aufzeichnung) noch nichts Neues
→ evtl. morgen, wie immer: Homepage beobachten.

Klausur „beanstandungen" werden Mi/Do geprüft → neue Liste im Web.

§3 Matrix-Multiplikation

Bsp. (vom letzten Mal)

$$\underbrace{\text{2 Zeil.}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right.}_{\text{3 Spalten}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{2 Spal}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}_{2}\Big\} 2$$

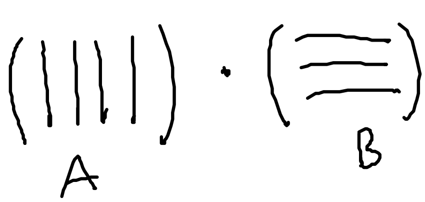
$\in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad$ $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\quad$ } 3 Zeilen

$$(-1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 + (-1) = -2$$

$$\text{3Z.}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{2 Sp.}}\right. = A \quad \cdot \quad B = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{\text{3 Sp.}}\Big\}\text{2 Zeil} \quad = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{3 Sp.}}\Big\}\text{3 Z.}$$

Eintrag in 3. Zeile, 2. Spalte berechnet sich als 3. Zeile aus A und 2. Spalte aus B

Beobachtungen / Bemerkungen

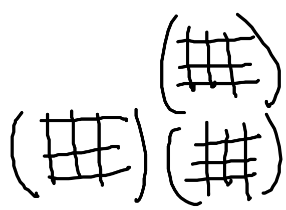
- Im Allg. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$ (s. Beispiel)
-  nicht def.

Spaltenzahl von A <u>muss</u> mit Zeilenzahl von B übereinstimmen.

Merkschema:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\circ & \\ & \circ\end{pmatrix}\end{array}$$

- Quadratische Matrizen derselben Größe sind immer miteinander multiplizierbar



Spezial<u>fall</u>: Matrix-Vektor-Multiplikation

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

Beobachtung:

A mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$, d.h. $A = \left[\begin{pmatrix} \\ a_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ a_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ a_n \\ \\ \end{pmatrix}\right]$

dann gilt

$$Ax = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \end{pmatrix}$$

d.h. Ax ist Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$

Motivation für das Matrixprodukt

Annahme: $y_1, \ldots, y_m$ hängen linear von $x_1, \ldots, x_n$ ab, d.h. es gibt Skalare a_{ij} mit

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Kurzschreibweise mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

also $\boxed{y = Ax}$

Wenn jetzt darüberhinaus die $x_1, \ldots, x_n$ linear von $t_1, \ldots, t_p$ abhängen, dann gibt es Skalare b_{jk}

mit $\quad x_j = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} t_k$

Kurzschreibweise $\quad B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$

$$\boxed{x = Bt}$$

<u>Frage</u>: Wie hängen $y_1, \dots, y_m$ von $t_1, \dots, t_p$ ab?

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} t_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \underbrace{a_{ij} \cdot b_{jk}}_{=: c_{ik}} \cdot t_k$$

Sei $C = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, dann gilt $\boxed{y = C \cdot t}$

(nach Def. des Matrix-Vektorprodukts)

Beobachtung $\quad C = A \cdot B$, also $\quad y = (A \cdot B) \cdot t$

Offenbar hängen dann die y auch linear von den t ab

$$\underline{(A \cdot B) t} = y = Ax = \underline{A(Bt)}$$

soll heißen: Klammerung egal.

führt auf

Rechenregeln :

1. $(AB)C = A\cdot(BC)$ (aber nicht gleich z.B $C\cdot B\cdot A$)

2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A\cdot(\lambda B)$

3. $A(B+C) = AB + AC$

   $(A+B)\cdot C = AC + BC$

4. $A\cdot 0 = 0$, $0\cdot A = 0$, wobei $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ „Nullmatrix"

5. $A\cdot E = A$, $E\cdot A = A$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ „Einheitsmatrix"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A\cdot E = A$

Transponierte einer Matrix

Definition: Die Transponierte einer $m\times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist definiert als die Matrix

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

/ Matrix A „auf die Seite gestellt".

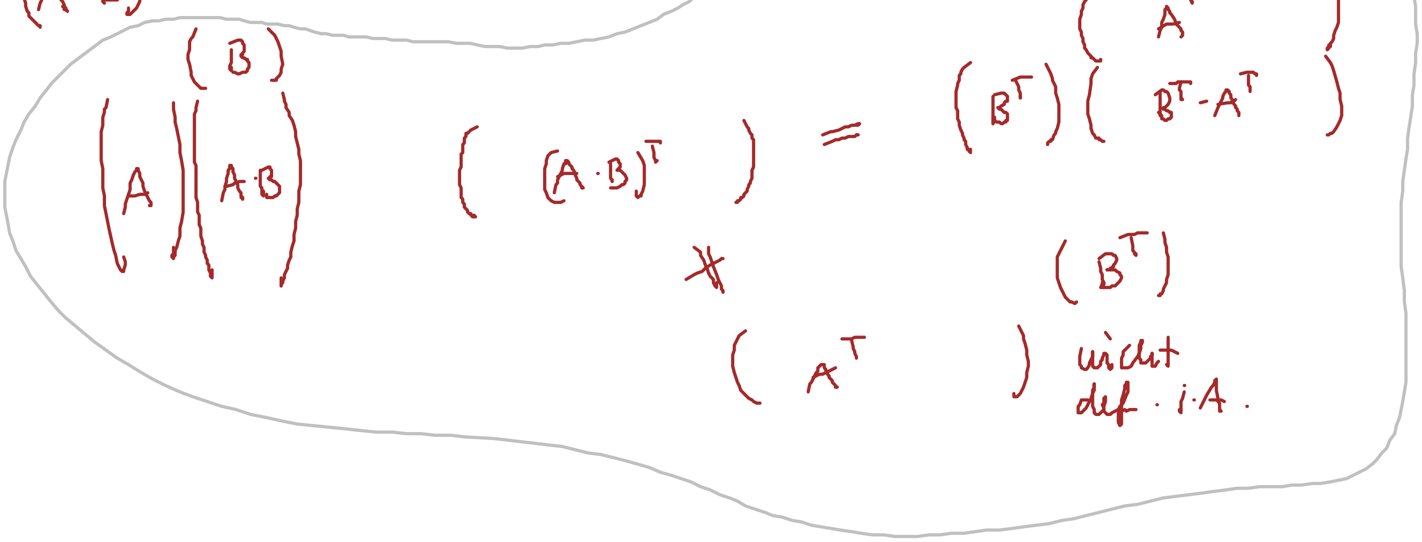
Zeile i von A wird Spalte i von A^T

Spalte j von A wird Zeile j von A^T.

Also $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

<u>Rechenregeln</u>

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$



Bsp.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\9&8&7\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&9\\2&8\\3&7\end{pmatrix} \qquad (1\ \ 2)^T = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}2&2\\3&4\end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}} = \overset{A\cdot B}{\begin{pmatrix}2&4\\3&7\end{pmatrix}}$$

$$(A\cdot B)^T = \begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix} = \underset{B^T}{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}} \cdot \underset{A^T}{\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$$

$$\neq \quad A^T \cdot B^T$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&2\\6&4\end{pmatrix}$$

Definition

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$

z.B. $\begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix}^T$

Eine Matrix heißt schiefsymmetrisch, wenn $A = -A^T$

z.B. $\begin{pmatrix}0&1&6&0\\-1&0&-2&-3\\-6&2&0&4\\0&3&-4&0\end{pmatrix}$

Invertierbare Matrizen

In diesem Abschnitt: Betrachte quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

E sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ Einheitsmatrix mit n Zeilen, n Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Def.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>invertierbar</u> (regulär), falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit

$$A \cdot B = E = B \cdot A$$

Andernfalls heißt A <u>singulär</u> (nicht invertierbar).

Bemerkung

Ist A invertierbar, so ist B eindeutig,

Grund („Beweis"):

Gäbe es eine weitere Matrix B' mit $AB' = B'A = E$, dann wäre

$$B = BE = B\cdot(AB') = (B\cdot A)\cdot B' = E\cdot B' = B'$$

Man nennt B die <u>Inverse von A</u> und schreibt $B = A^{-1}$.

Beispiele

1. E ist invertierbar, es gilt $E = E^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot E^{-1} = E$$

2. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $ad-bc \neq 0$

gilt $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A$$

3. Die Nullmatrix ist nicht invertierbar,

// weil $0 \cdot A = 0 \neq E$

4. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $AA = E$.

D.h. A ist invertierbar und ihre eigene Inverse.

<u>Satz</u>

1. Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$ // weil $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

2. Falls A und B invertierbar, so ist auch AB invertierbar und es gilt
$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

3. A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ A^T ist invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Charakterisierung invertierbarer Matrizen:

z.B. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, weil $ad - bc = 6 - 6 = 0$

Satz

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen equivalent:

a) A ist invertierbar

$\Leftrightarrow$ b) es gibt Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E$

$\Leftrightarrow$ c) es gibt Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $C \cdot A = E$

$\Leftrightarrow$ d) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

genau bei den invertierbaren Matrizen ist die „triviale" Linear-Kombination die einzige, bei der sich die Spalten zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ kombinieren

⚠ $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \not\Rightarrow x = 0$, weil $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow$ e) $\operatorname{rang}(A) = n$