

Zur Montag-Raumübung (ggf. VL-Anzeichnung) noch nichts Neues
 → evtl. morgen, wie immer: Homepage beobachten.
 Klausur "beanstandungen" werden Mi/Do geprüft → neue Liste im Web.

§3 Matrix-Multiplikation

Bsp. (vom letzten Mal)

$$\begin{matrix} 2 \\ \text{Zeil.} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (1 & 2 & 1) \\ (-1 & 0 & 2) \end{matrix} \right\} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} (-1 & 1) \\ 1 & 1) \\ 2 & -1) \end{matrix} \\ \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \end{matrix} = \begin{matrix} (3 & 2) \\ (5 & -3) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} (3 & 2) \\ (5 & -3) \end{matrix}} \right\} 2 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3 & 2) \\ (5 & -3) \end{matrix}} \right\} 3 \text{ Zeilen}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{3 \text{ Spalten}} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{2 \text{ Spalte}} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_2$

$$\begin{matrix} 3 \\ \text{Z.} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} A \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} (1 & 2 & 1) \\ (-1 & 0 & 2) \end{matrix} \\ B \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ 3 \text{ Sp.} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}} \right\} 3 \text{ Z.} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}} \right\} 2 \text{ Zeil}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2 \text{ Sp.}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{3 \text{ Sp.}}$

Eintrag in 3. Zeile, 2. Spalte berechnet sich als 3. Zeile aus A und 2. Spalte aus B

Beobachtungen / Bemerkungen

- Im Allg. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$ (s. Beispiel)

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \equiv \\ B \end{pmatrix} \text{ nicht def.}$$

Spaltenzahl von A muss mit Zeilenzahl von B
übereinstimmen.

Merkschema:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Quadratische Matrizen derselben Größe sind immer wieder-
ander multiplizierbar

$$\begin{pmatrix} \# & \# & \# \\ \# & \# & \# \\ \# & \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# & \# \\ \# & \# & \# \\ \# & \# & \# \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Matrix-Vektor-Multiplikation

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

Beobachtung:

A mit Spaltenvektoren

a_1, \dots, a_n , d.h.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

dann gilt

$$Ax = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \end{pmatrix}$$

d.h. Ax ist Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten x_1, \dots, x_n

Motivation für das Matrixprodukt

Annahme: y_1, \dots, y_m hängen linear von x_1, \dots, x_n ab, d.h.

es gibt Skalare a_{ij} mit

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Kurzschreibweise mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

also $y = Ax$

Wenn jetzt darüber hinaus die x_1, \dots, x_n linear von t_1, \dots, t_p abhängen, dann gibt es Skalare b_{jk}

mit

$$x_j = \sum_{k=1}^p b_{jk} t_k$$

Kurzschreibweise

$$B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$\boxed{x = Bt}$$

Frage: Wie hängen y_1, \dots, y_m von t_1, \dots, t_p ab?

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} t_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \underbrace{a_{ij} \cdot b_{jk}}_{=: c_{ik}} t_k$$

Sei $C = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, dann gilt

$$\boxed{y = C \cdot t}$$

(nach Def. des Matrix-Vektorprodukts)

Beobachtung $C = A \cdot B$, also $y = (A \cdot B) \cdot t$

Offensiv hängen dann die y auch linear von den t ab

$$\underline{(A \cdot B)t = y = Ax = \underline{A(Bt)}}$$

soll heißen: Klammerung egal.

führt auf
Rechenregeln:

1. $(AB)C = A \cdot (BC)$ (aber nicht gleich z.B. $C \cdot BA$)

2. $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A \cdot (\lambda B)$

3. $A(B+C) = AB + AC$

$(A+B) \cdot C = AC + BC$

4. $A \cdot 0 = 0$, $0 \cdot A = 0$, wobei

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

„Nullmatrix“

5. $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$, wobei

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

„Einheitsmatrix“

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = A$$

Transponierte einer Matrix

Definition: Die Transponierte einer $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist definiert als die Matrix

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix A , auf die Seite gestellt".

Zeile i von A wird Spalte i von A^T
Spalte j von A wird Zeile j von A^T .

$$\text{Also } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Rechenregeln

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix} \quad \left((A \cdot B)^T \right) = \begin{pmatrix} B^T \\ A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \cdot A^T \end{pmatrix}$$

\neq

$$\begin{pmatrix} B^T \\ A^T \end{pmatrix}$$

wird def. i.A.

Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & & A \cdot B \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{matrix} B^T & & A^T \\ & & = & B^T \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$

$$\text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Eine Matrix heißt schief-symmetrisch, wenn $A = -A^T$

$$\text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Invertierbare Matrizen

In diesem Abschnitt: Betrachte quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
E sei $\mathbb{R}^{n \times n}$ Einheitsmatrix mit n Zeilen, n Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Def.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar (regulär), falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit

$$A \cdot B = E = B \cdot A$$

Andernfalls heißt A singulär (nicht invertierbar).

Bemerkung

Ist A invertierbar, so ist B eindeutig,

Grund („Beweis“):

Gäbe es eine weitere Matrix B' mit $AB' = B'A = E$, dann wäre

$$\underline{B} = BE = \downarrow B \cdot (AB') = (B \cdot A) \cdot B' = E \cdot B' = \underline{B'}$$

Man nennt B die Inverse von A und schreibt $B = A^{-1}$.

Beispiele

1. E ist invertierbar, es gilt $E = E^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot E^{-1} = E$$

2. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $ad - bc \neq 0$

$$\text{gilt } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A$$

3. Die Nullmatrix ist nicht invertierbar,

// weil $0 \cdot A = 0 \neq E$

4. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $AA = E$.

D.h. A ist invertierbar und ihre eigene Inverse.

Satz

1. Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$ // weil $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

2. Falls A und B invertierbar, so ist auch AB invertierbar und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

3. A ist invertierbar $\Leftrightarrow A^T$ ist invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Charakterisierung invertierbarer Matrizen:

z.B. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, weil $ad-bc = 6-6=0$

Satz

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar

⇒ b) es gibt Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E$

⇒ c) es gibt Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $C \cdot A = E$

⇒ d) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

genau bei den invertierbaren Matrizen ist die „triviale“ Linearkombination die einzige, bei der sich die Spalten zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ kombinieren

⚠ $\begin{pmatrix} a & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \not\Rightarrow x = 0$, weil $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

⇒ e) $\text{rang}(A) = n$