

Orga

• Übung Katja Kulas : Mi 9.50 - 11.30 → S1/03-123

• Klausureinsicht morgen (21.4.) im S4/10-13
(Dolivoskr. 15)

Nachnamen

A-H 14.00 - 14.45

I-R 14.45 - 15.30

S-Z 15.30 - 16.15

Kollisionen (WiBi) fangen wir ggf Mi Vorkurs (28.4.) auf
(Webseite beobachten)

• Klausurmodus "Ritter"
bestehende Teilpunkte aus Mathe I oder II des Zyklus Ritter
bleiben nur noch dieses Semester bestehen.

• Modus Klausureinsicht: Beantwortungen sind konkret und schriftlich bei uns zu hinterlegen
→ wir entscheiden offline.

—
Gestern: Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus:

Lösen von LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Erw. Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\text{I} \\ -\frac{3}{2}\text{I} \end{array}$$

Durch elem. Zeilenumformungen (Gauß- Algo) stellt man Zeilenstufenform her, die "leicht" zu lösen ist.

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & 0 & -3/2 \end{array} \right) \quad -1 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{LGS besitzt keine Lösung}$$

Erinnerung: $\text{Rang}(A)$: maximale Anzahl lin.-unabh. Zeilen

Wahr: $\text{Rang}(A|b) > \text{Rang}(A)$

Die Elemente "an den Ecken" \bigcirc sind immer von Null verschieden, sie heißen Pivotelemente, zugehörige Variablen heißen Pivotvariablen.

Kette man als rechte Seite in obigem LGS

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

gewählt, wäre die Rechnung so gewesen:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\text{I} \\ -\frac{3}{2}\text{I} \end{array}$$

$$\leadsto \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right) -1 \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A|b) = 2 = \text{rang}(A) \Rightarrow \text{ex. Lösung}$

Pivotvariablen sind x_1, x_2

Bestimmen aller Lösungen dieses LGS:

1. x_3 frei wählbar : $x_3 = \lambda$ beliebig

2. Rückwärtseinsetzen:

$$\text{II: } \frac{5}{2}x_2 - 0 \cdot \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{I: } 2 \cdot x_1 - 3 \cdot \frac{1}{5} + 4\lambda = 5$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{3}{5} - 4\lambda \right)$$

$$= \frac{14}{5} - 2\lambda$$

Damit sind alle Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 - 2\lambda \\ 1/5 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösung des homogenen LGS $Ax=0$.

Zusammengefasst:

Satz

a) Das LGS $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A)$

b) Enthält $Ax=b$ n Unbekannte, so gibt es $n - \text{rang}(A)$ viele freie Variablen

// $n - \text{rang}(A)$ ist Anzahl der Nullzeilen der Zeilenstufenform.

c) Das LGS $Ax=b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\text{rang}(A) = n$

// es gibt keine Nullzeile in der Zeilenstufenform

d) Sei x_s eine spezielle Lösung von $Ax=b$

Ist x_h eine Lösung des homogenen LGS $Ax=0$,

so ist

$$x_s + x_h$$

$$\parallel Ax_s = b$$

$$Ax_h = 0$$

Lösung von $Ax = b$.

$$A(x_s + x_h) = Ax_s + Ax_h \\ = b + 0 = b$$

Umgekehrt gilt auch:

Zu jeder Lösung \bar{x} mit $A\bar{x} = b$ gibt es
eine Lösung \bar{x}_h mit $A\bar{x}_h = 0$ mit

$$\bar{x} = x_s + \bar{x}_h$$

Anwendungen

1. Parameterdarstellung einer Ebene

Bsp. Gegebene Ebene im \mathbb{R}^3 der Form

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

Gesucht: Parameterdarstellung

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$ ist bereits Zeilenstufenform

\parallel damit stehen noch 2 Nullzeilen
 $\Rightarrow x_2, x_3$ sind "frei", "unabhängige" Variablen

wähle $x_2 = \lambda, x_3 = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x_1 = 5 - 2\lambda + 3\mu$$

→ Lösungen des LGS

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2\lambda + 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist gesuchte Parameterdarstellung

2-Dimension und Basis eines Unterraums

Gegeben: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$U = \text{Lin}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Setze $A = \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

← Zeile i ist Vektor a_i
als Zeile geschrieben,
in Zeichen a_i^T

↑
"transponiert"

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ =5 \\ -5\text{II} \\ +3\text{II} \end{matrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \curvearrowright \\ :2 \end{matrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ höchstens 3 Vektoren sind lin.-unabh.
 $\Rightarrow \dim U = 3$

eine Basis von $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

// das sind die Nichtnullzeilen der Zeilenstufenform

Allgemein

$$U = \text{Lin}(a_1, \dots, a_m)$$

1. $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$, a_1^T, \dots, a_m^T sind Zeilenvektoren von A

2. $A \leadsto$ Gauß-Algorithmus \rightarrow Zeilenstufenform $\left(\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right) = M$

$$3. \dim U = \text{rang}(A) = \text{rang}(M) = r$$

4. Die von Null verschiedenen Zeilen von M bilden Basis von U

§3 Matrixmultiplikation

// verallgemeinert Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $AB = C = (c_{ij})$ definiert durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$i \text{ (A) } \begin{pmatrix} j \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

\uparrow
 j

i -te Zeile j -te Spalte

Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

