Orga

- Übung Katja Kulas: Mi 9.50 – 11.30 → S1|03 – 123
- Klausureinsicht morgen (21.4.) im S4|10 – 13
  (Dolivostr. 15)

Nachnamen	
A – H	14.00 – 14.45
I – R	14.45 – 15.30
S – Z	15.30 – 16.15

Kollisionen (WiBi) fangen wir ggf Mi vormittag (28.4.) auf
(Webseite beobachten)

- Klausurmodus „Ritter"
  bestehende Teilpunkte aus Mathe I oder II des Zyklus Ritter bleiben nur noch dieses Semester bestehen.
- Modus Klausureinsicht: Beanstandungen sind konkret und schriftlich bei uns zu hinterlegen
  → wir entscheiden offline.

Gestern: Gauß – Jordan – Eliminationsalgorithmus:

Lösen von LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Erw. Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{I} \end{array}$$

Durch elem. Zeilenumformungen (Gauß-Algo) stellt man Zeilenstufenform her, die „leicht" zu lösen ist.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 4 & 5 \\
0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ -1 \cdot \mathrm{II}
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 4 & 5 \\
0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{LGS besitzt keine Lösung}
\end{array}
$$

Erinnerung: Rang(A): maximale Anzahl lin. unabh. Zeilen

Hier: $\boxed{\text{Rang}(A|b) > \text{Rang}(A)}$

Die Elemente „an den Ecken" ○ sind immer von Null verschieden, sie heißen <u>Pivotelemente</u>, zugehörige Variablen heißen <u>Pivotvariablen</u>.

Hätte man als rechte Seite in obigem LGS

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

gewählt, wäre die Rechnung so gewesen:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{rang}\,(A|b) = 2 = \text{rang}\,(A)} \Rightarrow$ ex. Lösung

Pivotvariablen sind x_1, x_2

Bestimmen aller Lösungen dieses LGS:

1. x_3 frei wählbar : $x_3 = \lambda$ beliebig

2. Rückwärtseinsetzen:

$$\mathrm{II}: \quad \frac{5}{2}x_2 - 0\cdot\lambda = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{I}: \quad 2\cdot x_1 - 3\cdot\frac{1}{5} + 4\lambda = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{3}{5} - 4\lambda\right)$$

$$= \frac{14}{5} - 2\lambda$$

Damit sind alle Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 - 2\lambda \\ 1/5 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$.

Zusammengefasst:

<u>Satz</u>

a) Das LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A)$

b) Enthält $Ax = b$ n Unbekannte, so gibt es $n - \text{rang}(A)$ viele freie Variablen

// $n - \text{rang}(A)$ ist Anzahl der Nullzeilen der Zeilenstufenform.

c) Das LGS $Ax = b$ ist genau dann <u>eindeutig</u> lösbar, wenn $\text{rang}(A) = n$

// es gibt keine Nullzeile in der Zeilenstufenform

d) Sei x_s eine <u>spezielle</u> Lösung von $Ax = b$

Ist x_h eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$, so ist

$$x_s + x_h$$

Lösung von $Ax = b$.

// $Ax_s = b$
$Ax_h = 0$

$A(x_s + x_h) = Ax_s + Ax_h$
$= b + 0 = b$!

Umgekehrt gilt auch:
Zu jeder Lösung $\bar{x}$ mit $A\bar{x} = b$ gibt es eine Lösung $\bar{x}_h$ mit $A\bar{x}_h = 0$ mit

$$\bar{x} = x_s + \bar{x}_h$$

<u>Anwendungen</u>

1. Parameterdarstellung einer Ebene

Bsp. <u>Gegeben</u> Ebene im $\mathbb{R}^3$ der Form

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

<u>Gesucht</u>: Parameterdarstellung

$\underline{x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5}$ ist bereits Zeilenstufenform

// darunter stehen noch 2 Nullzeilen
$\Rightarrow$ x_2, x_3 sind „freie", „unabhängige" Variablen

wähle $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x_1 = 5 - 2\lambda + 3\mu$

$\Rightarrow$ Lösungen des LGS

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2\lambda + 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist gesuchte Parameterdarstellung

2. Dimension und Basis eines Unterraums

Gegeben: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$U = \mathrm{Lin}(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Setze $A = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \\ +1\mathrm{I} \end{array}$ $\leftarrow$ Zeile i ist Vektor a_i als Zeile geschrieben, in Zeichen a_i^T

„transponiert"

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & \overset{1}{\cancel{5}} & \overset{-1}{\cancel{-5}} & \overset{-1}{\cancel{-5}} \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ :5 \\ -5\mathrm{II} \\ +3\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad :2$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

höchstens

$\Rightarrow$ rang$(A) = 3$ $\Rightarrow$ 3 Vektoren sind lin. unabh.

$\Rightarrow \dim U = 3$

eine Basis von $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

// das sind die Nichtnullzeilen der Zeilenstufenform

Allgemein

$U = \text{Lin}(a_1, \ldots, a_m)$

1. $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$, $a_1^T, \ldots, a_m^T$ sind Zeilenvektoren von A

2. $A \rightsquigarrow$ Gauß-Algorithmus $\rightarrow$ Zeilenstufenform $= M$

3. $\dim U = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(M) = r$

4. Die von Null verschiedenen Zeilen von M bilden Basis von U

§3 Matrizenmultiplikation

// verallgemeinert Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $AB = C = (c_{ij})$ definiert durch

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} \text{—}A\text{—} \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} B \,\Big| \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} c_{\bullet} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

i-te Zeile   j-te Spalte $\uparrow j$

Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1(-1) \\ -1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & -1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$