Thema: Lineare Algebra

Ziel momentan: Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS)

z.B. $6x_1 + 3x_2 = 4$

$-x_1 + 2x_2 = -3$

Koeffizienten

rechte Seite

allgemeiner:
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Unbekannte

oder noch allgemeiner (mit n Unbekannten):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Beim letzten Mal: Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

speziell: $m=1$ oder $n=1$: Zeilen- oder Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$ Addition

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 20 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$ skalare Mult.

Damit bilden Matrizen einen Vektorraum.

Def.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Man definiert als Matrix-Vektor-Produkt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } \in \mathbb{R}^m}$$

entsteht komponentenweise, indem für Komponente i die i-te Zeile von A mit x per Skalarprodukt multipliziert wird.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert

Damit schreibt sich unser LGS ziemlich „kompakt":

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=: A \in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=: x \in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{=: b \in \mathbb{R}^m} \iff Ax = b$$

Ein LGS $Ax=b$ heißt <u>homogen</u>, wenn $b=0$, andernfalls (d.h. $b \neq 0$) heißt $Ax=b$ in<u>homogen</u>.

Die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

// dieses Schema versammelt sämtliche relevante „Zahlen" des LGS

heißt <u>erweiterte Koeffizientenmatrix</u>.

Bsp. $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$ inhomogen, weil $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

erweitert. Koeff.matrix:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Lösung linearer Gleichungssysteme

Ein homogenes LGS hat immer eine Lösung, nämlich $x=0$.
Diese heißt <u>triviale Lösung</u>.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$
$x_1 = x_2 = 0$ (d.h. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)
löst dieses LGS

Allgemein treten folgende Fälle auf:

1. Das LGS <u>besitzt keine Lösung</u>

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

// sich widersprechende Gleichungen

2. Das LGS <u>besitzt genau eine Lösung</u>:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = -4$$

// geometrisch: 2 Geraden schneiden sich (hier) in genau einem Punkt (hier: $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$)

3. Das LGS besitzt <u>unendlich viele Lösungen</u>:

$$3x_1 + 2x_2 = 5$$

// geometrisch: zwei identische Geraden schneiden sich „überall“.

Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ kann $x_1 = \frac{1}{3}(5-2\lambda)$ ausgerechnet werden, d.h.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-2\lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}$$ löst obiges LGS für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

Wie bekommt heraus, in welchem Fall man sich befindet?
Wie bekommt man ggf. eine Lösung?
Wie lasse ich das einen Computer machen? (Stichwort: Algorithmus)

Motivation:

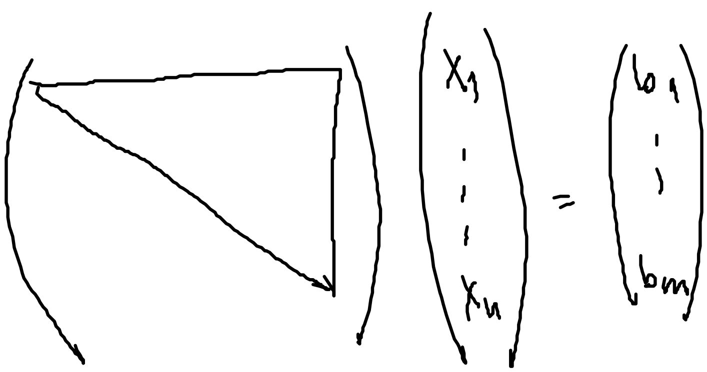
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_2 + 3x_3 &= -7 \\ -4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

1. $\Rightarrow x_3 = -1$

2. $\Rightarrow 2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = -2$

3. $\Rightarrow x_1 + 10 - 1 = 10 \Rightarrow x_1 = 1$

4. $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Lös



Matrix in „Dreiecksgestalt“ macht das Lösen „einfacher“.

Der Gauß-Jordan-Algorithmus

Betrachte erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Diese wird jetzt Schritt für Schritt umgeformt.

① Bestimme erste Spalte (von links gesucht) j mit $a_{ij} \neq 0$ für eine Zeile i

$$\begin{array}{cc} & a_{1j} \quad a_{ij} \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad \uparrow j & \end{array}$$

(d.h. alle Variablen $x_1, \dots, x_{j-1}$ sind frei wählbar)

Falls $a_{1j} = 0$, tausche Zeile 1 mit Zeile i

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② Addiere das $\left(-\frac{a_{kj}}{a_{1j}}\right)$-fache der 1. Zeile zur k-ten Zeile, für $k = 2, \dots, m$ (alle Zeilen unter der ersten)

Damit werden alle Koeffizienten in der j-ten Spalten „unterhalb" vom ersten Koeffizienten a_{1j} zu Null!

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -0 \cdot \mathrm{I} \\ -2 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

(3.) Wiederhole Schritte (1.) und (2.) ab der $(j+1)$-sten Spalte (und jeweils eine Zeile weiter nach unten gehend).

$a_{ij} \neq 0$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad + (-3)\,\mathrm{II}$$

Nach $m-1$ Wiederholungen erhält man die sogenannte <u>Zeilenstufenform</u> der erweiterten Koeff. matrix:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{1j_1} & \gamma_{1j_2} & \gamma_{1j_3} & \cdots & \gamma_{1j_r} & \cdots & \gamma_{1j_n} & \delta_1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_{2j_2} & \gamma_{2j_3} & & & & - & \delta_2 \\
 & & & & \vdots & 0 & \gamma_{3j_3} & \cdot & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots & & & \gamma_{rj_r} & & \gamma_{rj_n} & \delta_r \\
0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \delta_{r+1} \\
0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & & & & & \\
0 & & & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & \delta_m
\end{pmatrix}$$

<u>Beobachtung</u>

Die folgenden Umformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht:

(E1) Vertauschen zweier Gleichungen

(E2) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar (= einer Zahl) $\lambda \neq 0$

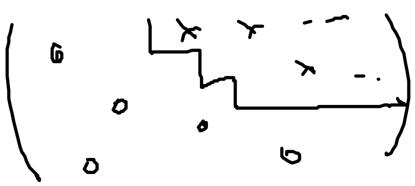
(E3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Diese drei Operationen heißen <u>elementare Zeilenumformungen</u>.

Daraus folgt:

Die Lösungsmenge des ursprünglichen LGS ist identisch zu der Lösungsmenge des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.

Sprich: Wir durften bedenkenlos den Gauß-Jordan-Eliminationsalgo. anwenden, ohne dass sich die Lösungsmenge verändert hätte.



<u>Beobachtungen</u>:

1. Die vom Nullvektor verschiedenen Zeilen sind linear unabhängig.
2. Die elementaren Zeilenumformungen ändern nichts an der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

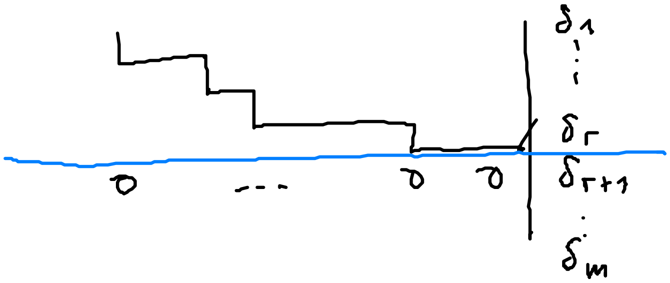
   // die Umformungen „fördern diese bloß zu Tage"

<u>Definition</u>

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix A heißt <u>Rang von</u> A, $\mathrm{rang}(A)$, $\mathrm{rg}(A)$.

Das LGS in Zeilenstufenform ist nun leicht zu lösen:

1. Eine der rechten Seiten $\delta_{r+1}, \dots, \delta_m$ ist von Null verschieden



Dann hat das LGS keine Lösung

// Durch Hinzunahme der rechten Seite b zur Matrix A ist offenbar eine weitere lin. unabh. Zeile „entstanden"

d.h. $\boxed{\text{rang}(A|b) > \text{rang}(A)}$.

2. $\delta_{r+1} = \dots = \delta_m = 0$, d.h. $\boxed{\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A)}$

Dann hat das LGS <u>mindestens eine</u> Lösung.

Man erhält alle Lösungen durch <u>Rückwärtseinsetzen</u>.
(s. morgen)