Orga

→ es gibt noch freie Übungsgruppen Fr. 8.00

→ Montagstermin VL 11.40 52|06-030
(„großer" Physikhörsaal)

evtl. Terminkollisionen bitte schnellstmöglich per Email an uns.

---

gestern: Vektorräume

Menge $V \neq \emptyset$, Elemente aus V kann addieren

$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$

Elemente aus V sollen mit Skalar multiplizierbar sein

$x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\to$ $\lambda \cdot x \in V$

+ 8 Rechenregeln, die sicherstellen, dass man mit Elementen aus V „rechnen kann wie mit Zahlen", z.B. $x + y = y + x$

Unterraum $U \subseteq V$ ist selbst Vektorraum

Linearkombination von $v_1, \dots, v_k$

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

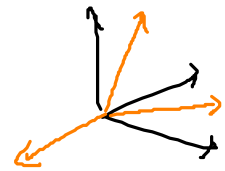
Die Menge aller Linearkom. von $v_1, \dots, v_k$: $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$

„lineare Hülle"

$\mathrm{Lin}(\nwarrow, \nearrow) =$ Ebene

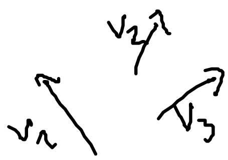
Andersherum: Welche Vektoren spannen einen Unterraum U auf? $\rightarrow$ Erzeugendensystem

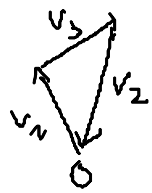
z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ spannen den $\mathbb{R}^3$ auf



$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Linear abhängig: $v_1, \dots, v_k$





falls es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ gibt (nicht alle $\alpha_i = 0$) mit

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

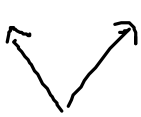
<u>Kriterium</u> zur Überprüfung Linearer Unabhängigkeit:

Betrachte $L = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_k\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_1 \cdot v_1 + \dots + x_k \cdot v_k = 0 \right\}$

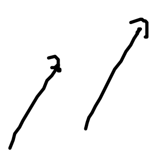
Dann gilt

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow L = \{0\}$

— " — ——— abhängig $\Leftrightarrow L \neq \{0\}$



l.u.



l.a.

Merkregel

$v_1, \dots, v_k$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Intuition: Ein solcher Vektor ist „nutzlos", mit den anderen kann man schon „genauso viel" aufspannen wie ohne ihn.

Basis und Dimension

Definition

Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißt Basis von V wenn:

(B1) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig

(B2) $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$

Beispiel

Einheitsvektoren e_i, $i = 1, \dots, n$ bilden Basis des $\mathbb{R}^n$

„Standardbasis"

Definition

Ein Vektorraum V heißt endlich-dimensional, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gibt mit $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$

Beispiel für unendlich-dim Vektorraum:

stetige Funktionen über $[0,1]$.

Satz (Basisergänzungssatz)
Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $v_1, \dots, v_k$ beliebige linear unabhängige Vektoren. Dann bilden $v_1, \dots, v_k$ bilden Basis von V oder können durch Hinzunahme weiterer Vektoren $u_1, \dots, u_l$ zu einer Basis erweitert werden.

Satz
Sei V endlichdimensionaler Vektorraum

a) Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis V, so es zu jedem $x \in V$ eine eindeutige Linearkombination aus $v_1, \dots, v_n$ die x ergibt, d.h.

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_1$$

mit eindeutigen $\alpha_1, \dots, \alpha_1$ („Koordinaten")

b) Eine Basis $v_1, \dots, v_n$ ist eine <u>maximal linear unabhängige Menge</u>, d.h. Hinzunahme eines weiteren Vektors führt auf linear abhängige Menge
(„ein Vektor ist über", weil er sich als Linearkomb. der anderen darstellen lässt)

c) Eine Basis $v_1, \dots, v_1$ ist <u>minimales Erzeugendensystem</u>, d.h. für jede echte Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$ gilt

$$V \neq \mathrm{Lin}(v_i, i \in I)$$

(„fehlt ein Vektor der Basis, kann man nicht mehr den ganzen Raum aufspannen")

d) Sind $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$ Basen von V
Dann gilt $n = m$

e) Je $n+1$ Vektoren in V sind linear abhängig.

D.h. alle Basen von V haben gleiche Kardinalität, genannt: Die <u>Dimension</u> n von V, auch: $\dim(V)$.

Man definiert: $\dim(\{0\}) = 0$

§2 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

<u>Beispiel</u>:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 9$$

x_1, x_2, x_3 Unbekannte / Variable

<u>Frage</u> Hat obiges <u>lineares Gleichungssystem</u> eine Lösung in x_1, x_2, x_3?

<u>Definition</u>

i-te Zeile j-te Variable

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots &+ a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \dots + a_{ij}x_j &+ \dots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots &+ a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

heißt <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS) mit

m Zeilen / Gleichungen
n Variablen

den <u>Unbekannten / Variablen</u> $x_1, \dots, x_n$
<u>Koeffizienten</u> $a_{11}, \dots, a_{mn}$
<u>rechter Seite</u> $b_1, \dots, b_m$.

Schreibweise: Man führt Matrizen ein, um ein LGS „übersichtlicher" zu schreiben:

<u>Def.</u>
Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt <u>reelle $m \times n$ Matrix</u> (gelesen „m kreuz n Matrix")

Kurzschreibweise $A = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Die Zahlen a_{ij} heißen Koeffizienten oder Komponenten

Die $m \times 1$ Matrizen $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ heißen Spaltenvektoren.

Die $1 \times n$ Matrizen $(\quad)$ heißen Zeilenvektoren.

Matrizen mit $m = n$, also $n \times n$ Matrizen, heißen quadratisch.

Die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt Nullmatrix.

Beispiele

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ 2×3 Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 3×2 Matrix

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3×1 Matrix (Vektor)

$(1 \;\; 2 \;\; 3)$ Zeilenvektor, 1×3 Matrix

Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{m_1 \times n_1}$ und $B = (b_{ij})_{m_2 \times n_2}$ heißen gleich (geschrieben $A = B$), falls

$m_1 = m_2$ (gleiche Zeilenzahl)

$n_1 = n_2$ (gleiche Spaltenzahl)

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

Definition

Die Addition und die skalare Multiplikation von Matrizen sind wie bei Vektoren komponentenweise definiert

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{für} \quad A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \qquad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Beispiele

1. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 3}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 3}} = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{4} & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

⚠ z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = ?$

ist nicht definiert.

Rechenregeln

Die Menge aller Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$ erfüllen Rechenregeln 1–8 eines Vektorraums und deswegen bilden die Matrizen zusammen mit obiger Addition und skalaren

Multiplikation einen Vektorraum.

Konsequenz für uns: Wir dürfen mit Matrizen rechnen, „wie mit Zahlen", z.B.

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$$

Übungsbetrieb startet nächste Woche!