Orga

→ es gibt noch freie Übungsgruppen Fr. 8.00

→ Montagstermin VL 11.40 52|06-030
(„großer" Physikhörsaal)

evtl. Terminkollisionen bitte schnellstmöglich per Email an uns.

---

gestern: Vektorräume

Menge $V \neq \emptyset$, Elemente aus V kann addieren

$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$

Elemente aus V sollen mit Skalar multiplizierbar sein

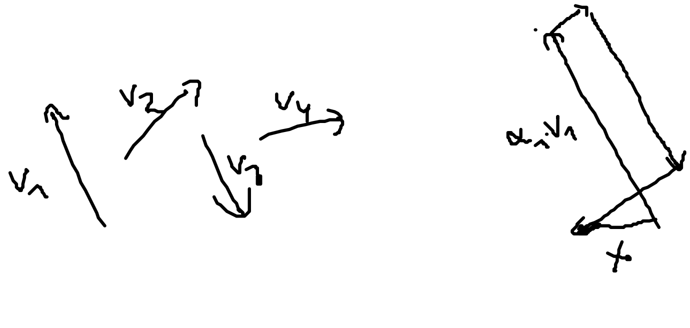
$x \in V, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot x \in V$

+ 8 Rechenregeln, die sicherstellen, dass man mit Elementen aus V „rechnen kann wie mit Zahlen", z.B. $x + y = y + x$

Unterraum $U \subseteq V$ ist selbst Vektorraum

Linearkombination von $v_1, \dots, v_k$

$$X = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$



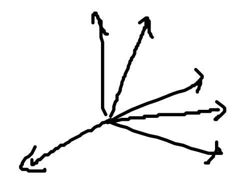
Die Menge aller Linearkom. von $v_1, \dots, v_k$: $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$

„lineare Hülle"

$\mathrm{Lin}(\uparrow, \nearrow) =$ Ebene

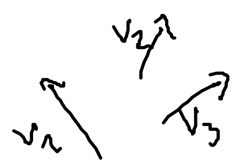
Andersherum: Welche Vektoren spannen einen Unterraum U auf? $\to$ Erzeugendensystem

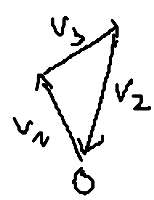
z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ spannen den $\mathbb{R}^3$ auf



$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Linear abhängig: $v_1, \dots, v_k$





falls es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ gibt (nicht alle $\alpha_i = 0$) mit

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

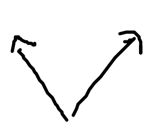
Kriterium zur Überprüfung Linearer Unabhängigkeit:

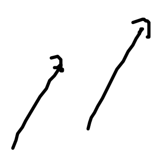
Betrachte $L = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_k\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_1 \cdot v_1 + \dots + x_k \cdot v_k = 0 \right\}$

Dann gilt

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow L = \{0\}$

— " — — " — abhängig $\Leftrightarrow L \neq \{0\}$


l.u.


l.a.

Merkregel

$v_1, \dots, v_k$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Intuition: Ein solcher Vektor ist „nutzlos", mit den anderen kann man schon „genauso viel" aufspannen wie ohne ihn.

Basis und Dimension

Definition

Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißt Basis von V wenn:

(B1) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig

(B2) $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$.

Beispiel

Einheitsvektoren e_i, $i = 1, \dots, n$ bilden Basis des $\mathbb{R}^n$

„Standardbasis"

Definition

Ein Vektorraum V heißt endlich-dimensional, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gibt mit $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$

Beispiel für unendlich-dim Vektorraum:
stetige Funktionen über $[0,1]$.

Satz (Basisergänzungssatz)

Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k$ beliebige linear unabhängige Vektoren. Dann bilden $v_1, \ldots, v_k$ bilden Basis von V oder können durch Hinzunahme weiterer Vektoren $u_1, \ldots, u_l$ zu einer Basis erweitert werden.

Satz

Sei V endlichdimensionaler Vektorraum

a) Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis V, so es zu jedem $x \in V$ eine eindeutige Linearkombination aus $v_1, \ldots, v_n$ die x ergibt, d.h.

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

mit eindeutigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ („Koordinaten")

b) Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist eine maximal linear unabhängige Menge, d.h. Hinzunahme eines weiteren Vektors führt auf linear abhängige Menge („ein Vektor ist über", weil er sich als Linearkomb. der anderen darstellen lässt)

c) Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist minimales Erzeugendensystem, d.h. für jede echte Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$V \neq \operatorname{Lin}(v_i, i \in I)$$

(„fehlt ein Vektor der Basis, kann man nicht mehr den ganzen Raum aufspannen")

d) Sind $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$ Basen von V
Dann gilt $n = m$

e) Je $n+1$ Vektoren in V sind linear abhängig.

D.h. alle Basen von V haben gleiche Kardinalität, genannt: Die <u>Dimension</u> n von V, auch: $\dim(V)$.

Man definiert: $\dim(\{0\}) = 0$.

<u>§2 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen</u>

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 9 \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 Unbekannte / Variable

<u>Frage</u> Hat obiges <u>lineares Gleichungssystem</u> eine Lösung in x_1, x_2, x_3?

<u>Definition</u>

i-te Zeile   j-te Variable

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots &+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \dots + a_{ij}x_j &+ \dots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots &+ a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

heißt **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit

m Zeilen / Gleichungen
n Variablen

den **Unbekannten / Variablen** $x_1, \dots, x_n$
Koeffizienten $a_{11}, \dots, a_{mn}$
rechter Seite $b_1, \dots, b_m$.

Schreibweise: Man führt Matrizen ein, um ein LGS „übersichtlicher" zu schreiben:

Def.
Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt **reelle $m \times n$ Matrix** (gelesen „m kreuz n Matrix")

Kurzschreibweise $A = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Die Zahlen a_{ij} heißen <u>Koeffizienten</u> oder <u>Komponenten</u>

Die $m \times 1$ Matrizen $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ heißen <u>Spaltenvektoren</u>.

Die $1 \times n$ Matrizen $(\quad\quad)$ heißen <u>Zeilenvektoren</u>.

Matrizen mit $m = n$, also $n \times n$ Matrizen, heißen <u>quadratisch</u>.

Die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt <u>Nullmatrix</u>.

<u>Beispiele</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

2×3 Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3×2 Matrix

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3×1 Matrix (Vektor)

$(1 \quad 2 \quad 3)$ Zeilenvektor, 1×3 Matrix

Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{m_1\times n_1}$ und $B = (b_{ij})_{m_2\times n_2}$ heißen <u>gleich</u> (geschrieben $A = B$), falls

$m_1 = m_2$ (gleiche Zeilenzahl)

$n_1 = n_2$ (gleiche Spaltenzahl)

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

Definition

Die Addition und die skalare Multiplikation von Matrizen sind wie bei Vektoren komponentenweise definiert

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Beispiele

1. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}} = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{4} & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

⚠ z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = ?$

ist nicht definiert.

Rechenregeln

Die Menge aller Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$ erfüllen Rechenregeln 1–8 eines Vektorraums und deswegen bilden die Matrizen zusammen mit obiger Addition und skalaren

Multiplikation einen Vektorraum.

Konsequenz für uns: Wir dürfen mit Matrizen rechnen, „wie mit Zahlen", z.B.

$$3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Übungsbetrieb startet <u>nächste Woche</u>!