Mathe II / BI

Marco Lübbecke, luebbecke@mathematik, 16-70867,
Di 10-11 S4|10-134,

Katja Kulas, Hendrik Schäfer + Tutoren

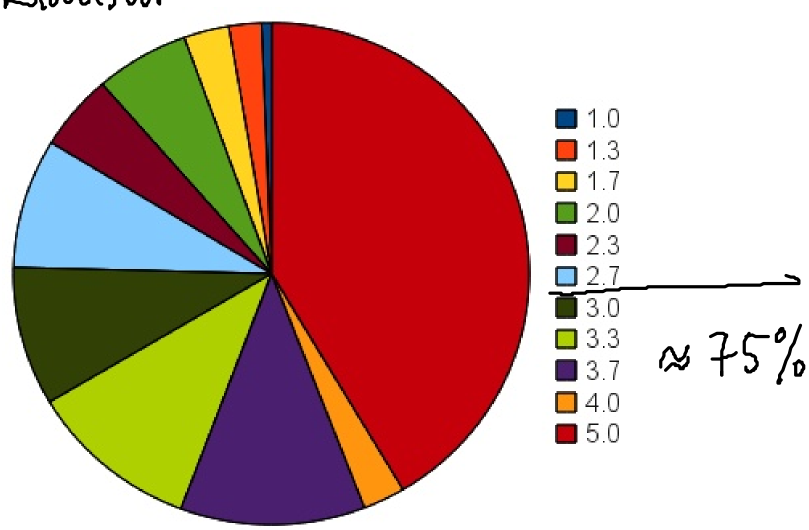
→ Webseite der VL enthält alle wichtigen Infos wie
: Telefonnr., Sprechstunden, Skript, etc.

Klausur 23.9.2010 9.00 - 10.30, 11.00 - 12.30
Mathe I Mathe II

Übungen: WWW eintragen ab 12.4.10 20.00
bis 14.4.10 20.00 ⚠

Montags-VL : Einer der beiden Termine wird angeboten
→ Abstimmung morgen
S3|11-08 13.30 oder S2|06-030 11.40

Klausur 18.3.



→ Termine Einsicht kommen demnächst

„Geometrie"

Extremwertaufgabe

	A1	A2	A3	A4	total
Durchschn.	7.51	5.56	1.70	11.15	25.87
Std.abw.	4.41	4.46	2.06	4.81	11.90

Mathe II

Kap. 6 Lineare Algebra

7 Differentiation

8 Integration

$\Big\}$ im Höherdimensionalen

Bücher: Meyberg/Vachenauer 1, Kap 6-8

Papula 2

speziell für Lin. Algebra: Fischer

Kapitel 6: Lineare Algebra

„handelt vom Lösen linearer Gleichungssysteme"

§1 Grundlagen

Bisher: Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Verallgemeinerung auf n Dimensionen.

Def.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

„Menge aller reellen Spaltenvektoren" mit n Komponenten.

Rechengesetze

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: Dann gelten

① $x + y = y + x$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{//} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

③ es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}^n$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

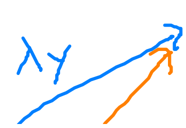
mit $x + 0 = x$

„neutrale Element", „Nullvektor"

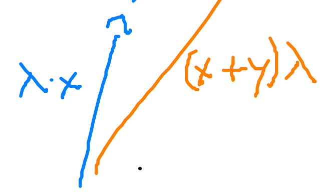
④ zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $-x \in \mathbb{R}^n$ mit $x + (-x) = 0$

⑤ $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \in \mathbb{R}$

⑥ $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$.



⑦ $\lambda\cdot(x+y) = \lambda x + \lambda y$



⑧ $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu\cdot x$

Soll heißen ①–⑧ stellen sicher, dass man mit Vektoren „so rechnen kann wie mit Zahlen"

Nicht definiert (und nicht erlaubt) sind
Produkt und Quotient.

leere Menge $\emptyset$

<u>Def.:</u>

Eine Menge $V \neq \emptyset$, in der man zu je zwei Elementen $x,y \in V$ die Summe $x+y$ bilden und zu jeder Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ-Fache $\lambda\cdot x \in V$ bilden kann und wenn ①–⑧ gelten, dann heißt V Vektorraum über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-Vektorraum).

<u>Beispiele</u>

1. die reellen Zahlen selbst
2. $\mathbb{R}^n$ mit Addition und skalarer Multiplikation
3. $P_n := \{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$
   Polynome n-ten Grades bilden Vektorraum
4. Die Menge der stetigen Funktionen über dem Intervall $[0,1]$: $C^0([0,1])$ mit

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

ist ein Vektorraum.

5. Man muss nicht $\mathbb{R}$ als den Bereich wählen aus dem die Zahl λ für skalare Multiplikation stammt, z.B. $\mathbb{C}$ ist ebenso denkbar (und andere Körper)

Im Folgenden bezeichnet V immer einen Vektorraum.

Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unterraum (linearer Teilraum) von V, falls

(U1) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$

(U2) $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U$

Bemerkungen

- $0 \in U$
- U ist selbst ein Vektorraum

Beispiele

1. die „trivialen" Unterräume $U = \{0\}$ und $U = V$

2. $$u = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \right\}$$

ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$, denn für zwei Vektoren $\alpha, \beta \in U$ gilt

$$\begin{array}{rl} & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \text{und} & 2\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 + \beta_4 = 0 \\ \hline & 2(\alpha_1+\beta_1) + \dots + (\alpha_4+\beta_4) = 0 \end{array}$$

im Ggs. dazu:

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 1 \right\}$$

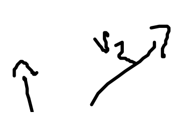
ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, denn die Summe $u+v$ für $u, v \in U$ muss nicht in U liegen.

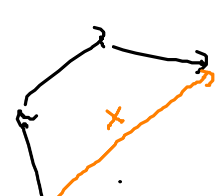
<u>Definition</u>

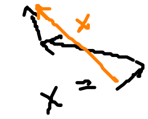
Seien $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann heißt jeder Vektor $x \in V$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$



z.B. $x =$ 



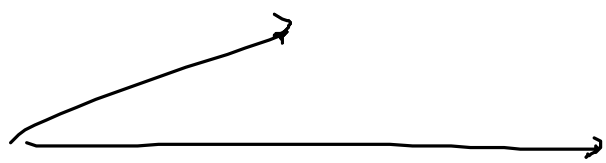
Linearkombination von $v_1, \dots, v_k$

Die Menge $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, k \right\}$

heißt **Lineare Hülle der** v_i.

Bemerkung: $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k)$ ist selbst ein Vektorraum.

Beispiel: 2 Vektoren im Raum, deren lineare Hülle ist eine Ebene.



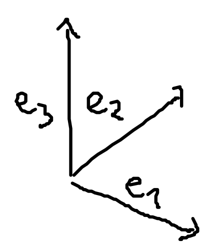
Definition

Sei U Untervektorraum von V und $v_1, \dots, v_k \in U$. Man sagt, $v_1, \dots, v_k$ bilden ein **Erzeugendensystem von U**, falls $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = U$.

Beispiel

Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

erzeugen den $\mathbb{R}^3$.



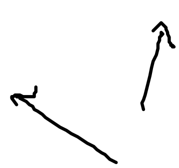
Man sagt auch: Diese Vektoren <u>spannen den $\mathbb{R}^3$ auf</u>.

Allgemein: Die n Einheitsvektoren
$$e_i = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Komponente} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$
erzeugen den $\mathbb{R}^n$.

<u>Definition</u>

$v_1, \dots, v_k$ heißen <u>linear abhängig</u>, wenn es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, sodass
$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0$$

Andernfalls heißen $v_1, \dots, v_k$ <u>linear unabhängig</u>



„diese beiden zu 0 zu addieren" klappt nur, wenn beide auf „Länge 0 gestaucht wurden".

Mit anderen Worten: $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig
$\Longleftrightarrow$ Der Nullvektor lässt sich nur trivial linear aus $v_1, \dots, v_k$ kombinieren
(d.h. alle α_i in der Linearkombination sind Null)

Beispiele

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sind linear abhängig

$$-1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow$ nicht-triviale Linearkombination der Null

2. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.