

Mathe II / BT

Marco Lübbecke, lubbecke@mathematik, 16 - 70 867,
Di 10-11 54/10 - 134,

Katja Kulas, Hendrik Schaefer + Tutoren

→ Webseite der VL enthält alle wichtigen Infos wie
: Telefonnr-, Sprechstunden, Skript, etc.

Klausur 23.9.2010 9.00 - 10.30, 11.00 - 12.30
Mathe I, Mathe II

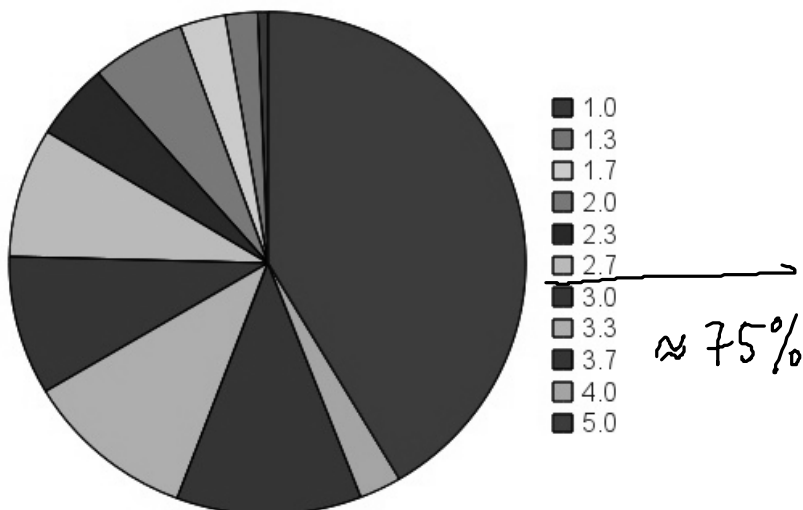
Übungen: WWW eintragen ab 12.4.10 20.00 ⚠
bis 14.4.10 20.00

Montags-VL : Einer der beiden Termine wird angeboten

→ Abstimmung morgen

S3/11-08 13.30 oder S2/06-030 11.40

Klausur 18.3.



→ Termine Einsicht kommen demnächst

„Geometrie“

Extremwertaufgabe

	A1	A2	A3	A4	total
Durchschn.	7.51	5.56	1.70	11.15	25.87
Std.abw.	4.41	4.46	2.06	4.81	11.90

Mathe II

Kap. 6 Lineare Algebra
7 Differentiation } im Höherdimensionalen
8 Integration

Bücher: Meyberg / Vachnauer 1, Kap 6-8
Papula 2
speziell für Lr. Algebra: Fischer

Kapitel 6: Lineare Algebra

„handelt vom Lösen linearer Gleichungssysteme“

§1 Grundlagen

Bisher: Vektoren in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Verallgemeinerung auf n Dimensionen.

Def.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

„Menge aller ~~reellen~~ Spaltenvektoren“ mit n Komponenten.

Rechengesetze

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: Dann gelten

$$\textcircled{1} \quad x + y = y + x \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{es gibt ein Element } 0 \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $x + 0 = x$

„neutrale Element“, „Nullvektor“

$$\textcircled{4} \quad \text{zu jedem } x \in \mathbb{R}^n \text{ gibt es ein } -x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x + (-x) = 0$$

$$\textcircled{5} \quad 1 \cdot x = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, 1 \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{6} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x \quad \lambda y \rightarrow$$

$$\textcircled{7} \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \lambda \cdot x \quad \bigg/ \quad (x+y)\lambda$$

$$\textcircled{8} \quad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$$

Soll heißen $\textcircled{7}$ + $\textcircled{8}$ stellen sicher, dass man mit Vektoren "so rechnen kann wie mit Zahlen"

Nicht definiert (und nicht erlaubt) sind Produkt und Quotient.

Def.

Eine Menge $V \neq \emptyset$ (leere Menge \emptyset), in der man zu je zwei Elementen $x, y \in V$ die Summe $x+y$ bilden und zu jeder Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ -Fache $\lambda \cdot x \in V$ bilden kann und wenn $\textcircled{7}$ - $\textcircled{8}$ gelten, dann heißt V Vektorraum über \mathbb{R} (\mathbb{R} -Vektorraum).

Beispiele

1. die reellen Zahlen selbst

2. \mathbb{R}^n mit Addition und skalarer Multiplikation

3. $P_n := \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

Polynome n -ten Grades bilden Vektorraum

4. Die Menge der stetigen Funktionen über dem Intervall $[0, 1]$: $\mathcal{C}^0([0, 1])$ mit

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

ist ein Vektorraum.

5. Man muss nicht \mathbb{R} als den Bereich wählen aus dem die Zahl λ für skalare Multiplikation stammt, z.B. \mathbb{C} ist ebenso denkbar (und andere Körper)

Im Folgenden bezeichnet V immer einen Vektorraum.

Definition

Eine nicht-leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unterraum (linearer Teilraum) von V , falls

$$(U1) \quad u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$$

$$(U2) \quad u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U$$

Bemerkungen

- $0 \in U$
- U ist selbst ein Vektorraum

Beispiele

1. die „trivialen“ Unterräume $U = \{0\}$ und $U = V$

$$2. \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \right\}$$

ist ein Unterraum von \mathbb{R}^4 , denn für zwei Vektoren $\alpha, \beta \in U$ gilt

$$\begin{array}{r} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \text{und} \quad 2\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 + \beta_4 = 0 \\ \hline 2(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + (\alpha_4 + \beta_4) = 0 \end{array}$$

im Ggs dazu:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 1 \right\}$$

ist kein Unterraum von \mathbb{R}^3 , denn die Summe $u+v$ für $u, v \in U$ muss nicht in U liegen.

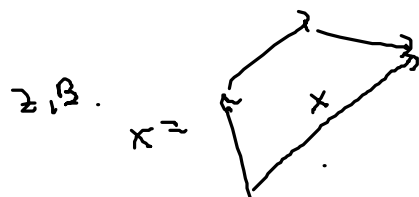
Definition

Seien $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann heißt jeder Vektor $x \in V$

mit

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$





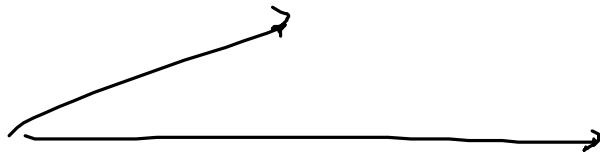
Linearkombination von v_1, \dots, v_k

Die Menge $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, k \right\}$

heißt Lineare Hülle der v_i .

Bemerkung: $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k)$ ist selbst ein Vektorraum.

Beispiel: 2 Vektoren im Raum, deren lineare Hülle ist eine Ebene.



Definition

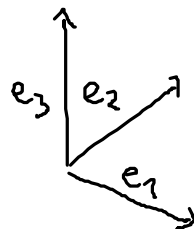
Sei U Untervektorraum von V und $v_1, \dots, v_k \in U$. Man sagt, v_1, \dots, v_k bilden ein Erzeugendensystem von U ,

falls $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = U$.

Beispiel

Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

erzeugen den \mathbb{R}^3 .



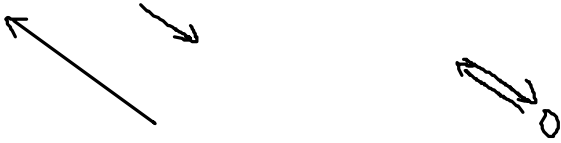
Man sagt auch: Diese Vektoren spannen den \mathbb{R}^n auf.

Allgemein: Die n Einheitsvektoren erzeugen den \mathbb{R}^n .

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{te Komponente}$$

Definition

v_1, \dots, v_k heißen linear abhängig, wenn es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, sodass $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0$



Andernfalls heißen v_1, \dots, v_k linear unabhängig

diese beiden zu 0 zu addieren klappt nur, wenn beide auf "Länge 0 gestanden wurden".

Mit anderen Worten: v_1, \dots, v_k sind linear unabhängig \Leftrightarrow Der Nullvektor lässt sich nur trivial linear aus v_1, \dots, v_k kombinieren (d.h. alle α_i in der Linearkombination sind Null)

Beispiele

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sind linear abhängig

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow$ nicht-triviale
Linearkombination der Null

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sind linear unabhängig.