Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
06.07.2010

12. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Energie-Methode für die Wärmeleitgleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass höchstens eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega}) \times C^1(0,T)$ von (1) existiert.

Aufgabe G2 (D'Alembertsche Formel für die eindimensionale Schwingungsgleichung)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ gegebenene Funktionen und $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$, konstant. Sei ferner $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds$$

definiert (d'Alembertsche Formel). Zeigen Sie, dass u das folgende Cauchy-Problem löst:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \varphi(x) \quad \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$