Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2010
29.06.2010

11. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Hausübung

Aufgabe H1 (Fouriermethode für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, 4 Punkte)

Betrachen Sie die Aufgabe

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{in } (0,1) \times (0,T) \tag{1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{für } x \in (0,1) \tag{2}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \text{für } t \in (0,T), \tag{3}$$

wobei φ stetig differenzierbar sei. Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Fouriermethode. Rechnen Sie dabei rein formal ohne die Konvergenz der Reihen zu beweisen.

Hinweis: Gehen Sie dabei analog zur Schwingungsgleichung vor. Die Idee besteht wieder darin, die Lösung aus (unendlich vielen) partikulären Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

zusammenzusetzen, welche die Randbedingungen (3) erfüllen.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Achtung: Wahlaufgabe! Bitte wählen Sie aus den beiden folgenden Aufgaben eine aus. Bitte bearbeiten Sie NICHT beide Aufgaben.

- **Alternative 1, mathematische Aufgabe**
  $u \in C^2(\Omega)$ erfülle die Mittelwertformel, d.h. für alle $B(x,r) \subset \Omega$ gelte

  $$u(x) = \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} u(y)\,ds_y. \tag{4}$$

  Zeigen Sie, dass u harmonisch in Ω ist.

  Hinweis: Beachten Sie, dass aus (4) folgt: $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{|S(x,r)|}\int_{S(x,r)} u(y)\,ds_y\right) = 0.$

- **Alternative 2, Anwendungsaufgabe**
  Die Lösung des so genannten *Cauchyproblems*

$$\begin{aligned} u_t - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x) && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

  ist gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \exp\Big(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\Big) dw$$

  (ohne Beweis). Berechnen Sie damit die Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - 9u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= e^{-3x^2} && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Abgabe der Hausaufgaben: Am 05.07.10 bzw. 08.07 .10 in der Übung.