Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
22.06.2010

10. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Hausübung

Aufgabe H1 (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, 3 Punkte)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{$*$}$$

(d.h. $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$). Die Funktion

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n,\, t < 0. \end{cases}$$

wird *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung* genannt.

Zeigen Sie, dass

(a) die Funktion Φ radialsymmentrisch bzgl. x ist,

(b) Φ die PDGl $(*)$ erfüllt.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Achtung: Wahlaufgabe! Bitte wählen Sie aus den beiden folgenden Aufgaben eine aus. Bitte bearbeiten Sie NICHT beide Aufgaben.

- **Alternative 1, mathematische Aufgabe**
  Beweisen Sie folgenden Satz:
  Ω sei beschränkt und $\{u_n\}$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω, $u_n \in C(\bar{\Omega})$. Konvergiert u_n gleichmäßig auf Γ, so auch in Ω.

  Hinweis: Benutzen Sie das Maximumsprinzip für $u_n - u_m$. Beachten Sie dabei die Definition der C-Norm
  $$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$$
  und die Vollständigkeit von $C(\bar{\Omega})$ mit dieser Norm.

- **Alternative 2, Anwendungsaufgabe**

  Sei Φ wie in H1 definiert. Zeigen Sie, dass

  $$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1$$

  für jedes $t > 0$.

  Hinweis: Benutzen Sie dabei, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 29.06.10 bzw. 02.07 .10 in der Übung.