Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2010
15.06.2010

9. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Greensche Funktion für den Halbraum – Spiegelungsmethode)

Sei Ω der Halbraum der $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) |\ x_n > 0\}.$$

- Zeigen Sie, dass die Funktion

  $$\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$$

  mit dem Spiegelpunkt $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, -x_n)$ die folgende PDGl löst:

  $$\begin{aligned} -\Delta\phi^x(y) = 0 &\quad \text{für alle } y \in \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi(y - x) &\quad \text{für alle } y \in \Gamma = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}. \end{aligned}$$

  Wie sieht demnach die Greensche Funktion auf dem Halbraum aus?

- Sei nun $n = 2$, so dass $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Wir betrachten die folgende PDGl

  $$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Geben Sie die Lösungsdarstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion an.

Hausübung

Aufgabe H1 (Invarianz des Laplace-Operators unter orthogonalen Transformationen, 3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h $A^\top = A^{-1}$. Des Weiteren sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ und v durch $v(x) = u(Ax)$ definiert. Zeigen Sie, dass dann $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie, dass aus der Orthogonalität von A folgt, dass $(Ax)^\top Ay = x^\top y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Achtung: Wahlaufgabe! Bitte wählen Sie aus den beiden folgenden Aufgaben eine aus. Bitte bearbeiten Sie NICHT beide Aufgaben.

- **Alternative 1, mathematische Aufgabe** Sei

$$\delta_x(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

die sogennante *Diracsche Delta-Distribution*. Zeigen Sie, dass

(a) δ_x nach Definition eine Distribution ist, aber keine reguläre Distribution.

(b) δ_0 die distributionelle Ableitung der sogenannten *Heaviside Funktion* ist:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

- **Alternative 2, Anwendungsaufgabe** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, reelle Matrix und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \frac{1}{2}\, x^\top Ax$$

definiert. Zeigen Sie, dass

(a) $\nabla u(x) = Ax$,

(b) $\Delta u(x) = \mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$,

(c) für den *Fluss* von ∇u durch die Oberfläche des n-dimensionalen Würfels $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r,\ j = 1, ..., n\}$ gilt:

$$\int_{\partial Q} \nabla u \cdot \nu ds = \mathrm{tr}(A) 2^n r^n$$

Hinweis: Benutzen Sie für den letzte Aufgabenteil den Satz von Gauß.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 22.06.10 bzw. 25.06.10 in der Übung.