Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2010
08.06.2010

8. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (PDGl'en und Funktionalminimierung, Teil I)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und die Menge $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

definiert.

(a) Wir betrachten folgende Abbildung $J : C^2(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$, auch *Funktional* genannt:

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}(|\nabla u(x)|^2 + u^2) - u\,f\Big)dx \tag{1}$$

mit gegebener stetiger Funktion $f \in C(\bar{\Omega})$. Wir nehmen an, dass $u^* \in \mathcal{A}$ das Funktional J auf $\mathcal{A}$ minimiert, d.h.

$$J(u^*) = \min_{u\in\mathcal{A}} J(u) \quad \Leftrightarrow \quad J(u^*) \le J(u) \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, dass u^* dann folgende PDGl löst:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Wir betrachten jetzt das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\,|\nabla u(x)|^2 - u\,f\Big)dx. \tag{1*}$$

Anstatt von $\mathcal{A}$ setzen wir

$$\mathcal{B} := \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

gegeben. Zeigen Sie: Wenn $u^* \in \mathcal{B}$ das Funktional I auf $\mathcal{B}$ minimiert, d.h.

$$I(u^*) \leq I(u) \quad \forall u \in \mathcal{B},$$

dann löst u die PDGl:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2*}$$

Achtung: Die Herangehensweise von (a) ist hier nicht ganz anwendbar. Man braucht das sogenannte „Fundamentallemma der Variationsrechnung“:
Wenn $f \in C(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

erfüllt, dann ist $f \equiv 0$, d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. (Das Lemma gilt sogar für $f \in L^1(\Omega)$. Dann gilt die Aussage bis auf Nullmengen.)

Bemerkungen:

- Mit anderen Worten: die PDGl'en (2) bzw. (2*) zu lösen, ist äquivalent zur Minimierung der Funktionale J bzw. I. Diese Herangehensweise wird in der *„Variationsrechnung“* untersucht.
- In der Literatur wird das Funktional I oft *„Energiefunktional“* genannt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Energiefunktional, 4 Punkte)

Sei u die Lösung von folgendem Anfangs-Randwertproblem:

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} =& c^2\Delta u + f \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) =& 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \\ u(0,x) =& u^0(x) \quad \text{für } x \in \Omega \\ u_t(0,x) =& u^1(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ist. Sei

$$E(t) = \int_\Omega \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) dx$$

die Energie im Punkt $t \in \mathbb{R}_+$.

(a) Zeigen Sie, dass $E(t)$ konstant ist, wenn $f = 0$.
Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung $E'(t)$ und benutzen Sie die erste Greensche Formel.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Lösung von (3) für beliebiges $f \in C(\bar{\Omega})$ eindeutig ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, es existierten zwei Lösungen u and v. Welche PDGl wird von $u - v$ gelöst?

Aufgabe H2 (PDGl'en und Funktionalminimierung, Teil II, 4 Punkte)

Seien J und $\mathcal{A}$ wie in G1 definiert. Sei $u^* \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung von folgendem Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u^* + u^* = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{A}} J(u).$$

Hinweis: Zeigen Sie für beliebiges $w \in \mathcal{A}$, dass

$$J(u^*) \leq J(w).$$

Betrachten Sie

$$\int_\Omega (-\Delta u^* + u^* - f)(u^* - w)dx$$

in Zusamemnhang mit der gegebenen PDGL.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 15.06.10 bzw. 18.06.10 in der Übung.