Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
01.06.2010

7. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Oberflächenintegral)

Wir bezeichen mit

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$$
$$S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$$

und

$$|B(x_0, r)| = \int_{B(x_0,r)} dx \qquad \text{(Volumenintegral)}$$
$$|S(x_0, r)| = \int_{S(x_0,r)} ds \qquad \text{(Oberflächenintegral)}$$

die Kugel und ihre Oberfläche im $\mathbb{R}^n$ und ihr Volumen bzw. Flächeninhalt. Damit sind $V_n := |B(0, 1)|$ und $\omega_n := |S(0, 1)|$ das Volumen bzw. der Oberflächeninhalt der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $n = 2$. Zeigen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten, dass

$$V_2 = \frac{1}{2}\,\omega_2$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie für beliebiges n, dass

$$\int_{S(0,r_1)} f(x)dS_x = (r_1/r_2)^{n-1} \int_{S(0,r_2)} f\Big(\frac{r_1}{r_2}\,x\Big)dS_x.$$

Was folgt daraus für $f \equiv 1$?

(c) Sei wieder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $r > 0$ beliebig. Beweisen Sie, dass mit der Koordinatentransformation $\tilde{y} = x - y$ gilt, dass

$$\int_{S(0,r)} f(x-y)dS_y = \int_{S(x,r)} f(\tilde{y})dS_{\tilde{y}}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Laplace-Operator und Kugeloberfläche, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS_y\right). \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauß für Gradientenfelder.

Aufgabe H2 (Oberflächenintegral, 3 Punkte)

Die Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ habe folgende Parametrisierung:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \ \text{ mit } \ (u,v) \in \Omega\}$$

mit einem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine Funktion und

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \quad \tfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}.$$

Dann ist das *Oberflächenintegral* definiert durch

$$\begin{aligned}&\int_S f(x,y,z)dS(x,y,z)\\ &= \int_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}dudv.\end{aligned}$$

Sei jetzt $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z = 3x - 2y\}$ und $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. Berechnen Sie $\int_S f dS$.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 08.06.10 bzw. 11.06.10 in der Übung.