Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
18.05.2010

5. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Achtung: Wahlaufgabe! Bitte wählen Sie aus den beiden folgenden Aufgaben eine aus. Bitte bearbeiten Sie NICHT beide Aufgaben.

(Die Hinweise “mathematische” bzw. “Anwendungsaufgabe” sind nur Empfehlungen; natürlich können auch Mathematiker die Anwendungsaufgabe bearbeiten und Ingenieure die mathematische Aufgabe.)

- **Alternative 1, mathematische Aufgabe**

  Auf dem 4. Übungsblatt (Aufgabe H2–Alternative 2) hatten wir die PDGl

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{4}$$

  betrachtet. Hierbei sind $a \in \mathbb{R}$ und $\phi, \psi : [0,l] \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei ϕ und ψ l-periodische und Riemann-integrierbare Funktionen sind. Mit Hilfe der Fouriermethode hatten wir folgende Lösungsdarstellung erhalten:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \varphi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\, dy \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \psi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\, dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Sei jetzt $u(x,t)$ die formale Lösung (5) des Anfangs- und Randwertaufgabe (1)–(4). Seien ferner

$$\varphi \in C^2([0,l]), \quad \psi \in C^1([0,l])$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x,t)$ unter den Voraussetzungen an ϕ und ψ tatsächlich zweimal stetig differenzierbar ist und damit eine (klassische) Lösung der PDGl darstellt.

- **Alternative 2, Anwendungsaufgabe**

  Lösen Sie folgende Anfangs- und Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= f \qquad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

  mit $f(\phi) = 1 + 8\sin\phi - 3\cos\phi$ und folgenden Gebieten:

  (a) Innengebiet: $\Omega = \{(x,y)|\; x^2 + y^2 < 1\}$

  (b) Außengebiet: $\Omega = \{(x,y)|\; x^2 + y^2 > 1\}$

Abgabe der Hausaufgaben: Am 25.05.10 bzw. 28.05.10 in der Übung.