Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
27.04.2010

2. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Koordinatentransformation)

Wir betrachten die Gleichung:

$$3u_x(x,y) - 4u_y(x,y) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{$*$}$$

(a) Zeigen Sie, daß $(*)$ mit Hilfe der folgenden Koordinatentransformation

$$\xi = 3x - 4y, \quad \eta = 4x + 3y$$

in folgende PDGl in den neuen Koordinaten (ξ, η) umgewandelt werden kann:

$$\hat{u}_\xi = 0$$

mit $\hat{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$.

(b) Geben Sie die Lösung von $(*)$ in allgemeiner Form an.

Aufgabe G2 (PDGl'en lösen mittels Analogien zu gewöhnlichen DGl'en)

Lösen Sie (mittels Analogien zu gewöhnlichen DGl'en):

$$u_{yy} + u_y + x = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $v(x,y) = u_y(x,y)$ und behandeln Sie x wie einen Parameter in der entstehenden Gleichung.

Aufgabe G3 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)

Wir betrachten *Polarkoordinaten*:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Wie sieht der Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

in den neuen Koordinaten aus?

Hausübung

Aufgabe H1 (Koordinatentransformation, 4 Punkte)

(a) In Analogie zu G1, lösen Sie:

$$3u_x(x,y) - 4u_y(x,y) = 25x.$$

(b) Sei u eine Lösung der Schwingungsgleichung:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Finden Sie eine lineare Koordinatentransformation

$$\xi = \alpha x + \beta t, \quad \eta = \gamma x + \delta t,$$

so dass die Funktion $\hat{u}(\xi, \eta) = u(t, x)$ die Gleichung

$$\hat{u}_{\xi\eta} = 0$$

erfüllt.
Wie lautet die Lösung der Schwingungsgleichung damit in allgemeiner Form?

Aufgabe H2 (PDGl'en lösen mittels Analogien zu gewöhnlichen DGl'en, 3 Punkte)

Lösen Sie (mittels Analogien zu gewöhnlichen DGl'en):

$$u_{xx} + y = 1/x.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ und beachten Sie, dass die obige Gleichung für $x = 0$ nicht wohl definiert ist.

Aufgabe H3 (Spezielle Lösungen der Laplacegleichung, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Laplace-Gleichung

$$\triangle u(x) = 0$$

lösen:

(a) für $n = 2:$ $\qquad u = \ln r,$

(b) für $n \geq 3:$ $\qquad u = r^{2-n}$

mit $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2.$

(Man nennt diese Funktionen auch „Fundamentallösungen".)

Abgabe der Hausaufgaben: Am 4.05.10 bzw. 7.05.10 in der Übung.