Fachbereich Mathematik
JProf. Dr. Christian Meyer
Lucia Panizzi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
20.04.2010

1. Übungsblatt zur „Partielle Differentialgleichungen: klassische Methoden“

Hausübung

Aufgabe H1 (Nabla-Kalkül, 3 Punkte)

Die skalaren Funktionen $\psi, \phi, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

a) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$

b) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$

c) $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$

d) $\operatorname{div}(\psi \nabla \phi) = \psi \Delta \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$.

Aufgabe H2 (Green'sche Formel und Satz von Gauß, 4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ und $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalare Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar sind.
Die *Green'sche Formel* der partiellen Integration lautet:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx + \int_\Gamma v \, \partial_n u \, ds, \tag{1}$$

wobei $\partial_n u = \nabla u \cdot \vec{n}$ mit der äußeren Normalen $\vec{n}$ auf Γ die Normalenableitung bezeichnet.

- Leiten Sie aus der Green'schen Formel (1) den Satz von Gauß für Gradientenfelder her, d.h.

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) \, dx = \int_\Gamma \nabla u \cdot \vec{n} \, ds. \tag{2}$$

- Zeigen Sie umgekehrt, dass die Green'sche Formel (1) aus dem Satz von Gauß hergeleitet werden kann. (Die nötige Differenzierbarkeit der Funktionen wird vorausgesetzt.) *Hinweis:* Benutzen Sie dabei Gleichung d) aus Aufgabe H1.

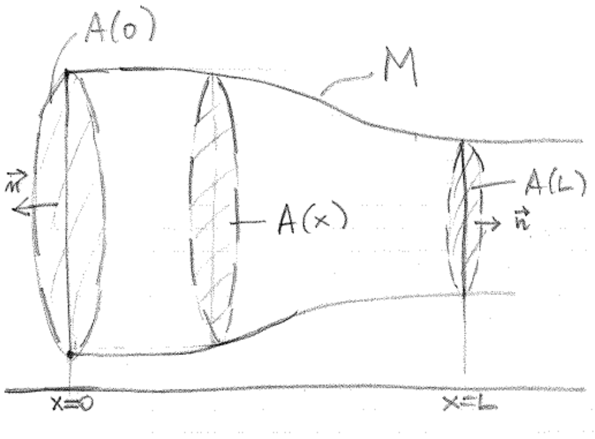

Abbildung 1: Eindimensionale Rohrströmung

Aufgabe H3 (Masseerhaltung bei eindimensionaler Rohrströmung, 4 Punkte)

Wir betrachten die Strömung eines *inkompressiblen* Fluids durch ein gerades Rohr, dessen Querschnitt sich in x-Richtung ändert, s. Abb. 1. Hierbei sind:

- $A(x)$ die von x abhängige Querschnittsfläche des Rohres
- $\partial V = M \cup A(0) \cup A(L)$ die Oberfläche des betrachteten Rohrabschnitts
- ρ die Dichte des Fluids
- $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ der Strömungsgeschwindigkeitsvektor
- $\vec{n}_0$, $\vec{n}_L$ die Normalvektoren auf $A(0)$ und $A(L)$.

Wir nehmen folgende *Voraussetzungen* an:

- Die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}$ ist nur von x abhängig, d.h. $\vec{u} = \vec{u}(x) \neq \vec{u}(x, y, z)$.
- Inkompressible Strömung, d.h. ρ = const.
- Die Mantelfläche des Rohres M sei undurchlässig, d.h. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ auf M.

Zeigen Sie von der Kontinuitätsgleichung in integraler Form (Gl. (1.3) im Vorlesungsskript)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \int_{\partial V} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

ausgehend, dass

$$\frac{u_x(L)}{u_x(0)} = \frac{|A(0)|}{|A(L)|},$$

wobei u_x die x-Komponente von $\vec{u}$ bezeichnet.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 27.04.10 bzw. 30.04.10 in der Übung.