19 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir beschäftigen uns nun mit Anfangswertproblemen für *lineare* Differentialgleichungen, über die man sehr viel mehr aussagen kann als im allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

19.1 Allgemeine lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir bereits in Abschnitt 18.2.2 kennen gelernt. Analog dazu treffen wir die folgende Definition.

Definition 19.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall, $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, \dots, a_{n-1}$ sowie b seien gegebene stetige reellwertige Funktionen auf I. Dann heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{19.1}$$

eine lineare Differentialgleichung *n-ter* Ordnung *auf I. Die Funktionen a_i heißen die* Koeffizienten *der Differentialgleichung und b die* rechte Seite *oder die* Störfunktion. *Ist b nicht die Nullfunktion, so heißt* (19.1) *eine* inhomogene *Differentialgleichung, und*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{19.2}$$

heißt die zugehörige homogene Gleichung.

Das Wort „linear“ kann man wie folgt verstehen: Erklärt man einen Operator A auf dem linearen Raum aller n mal differenzierbaren Funktionen auf I durch

$$(Ay)(x) := y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x),$$

so kann man (19.1) schreiben als $Ay = b$, und der Operator A ist linear.

Definition 19.2 *Unter* Anfangsbedingungen *für* (19.1) *versteht man die Vorgabe der Werte*

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \tag{19.3}$$

an einer Stelle $x_0 \in I$.

Satz 19.3 *Das Anfangswertproblem* (19.1) *mit* (19.3) *besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung y auf ganz I.*

Während Picard-Lindelöf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nur auf einem (möglicherweise sehr kleinen) Intervall um x_0 herum garantiert, hat man also für *lineare* Anfangswertprobleme (=AWP) die eindeutige Lösbarkeit auf ganz I.

Wir sehen uns nun an, wie die Lösungen linearer Differentialgleichungen aufgebaut sind und beginnen mit homogenen Gleichungen.

Satz 19.4 (Überlagerungsprinzip) *Sind* $y_1, \ldots, y_k$ *Lösungen der homogenen Gleichung* (19.2) *und* $c_1, \ldots, c_k$ *reelle Zahlen, so ist auch*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$$

eine Lösung von (19.2).

Dies sieht man am einfachsten, wenn man die Schreibweise $Ay = 0$ für (19.2) benutzt. Aus $Ay_1 = Ay_2 = \ldots = Ay_k = 0$ und der Linearität von A folgt sofort

$$A(c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k) = c_1Ay_1 + c_2Ay_2 + \ldots + c_kAy_k = 0.$$

Die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung $Ay = 0$ bildet also einen linearen Raum. Wie groß ist dessen Dimension?

Satz 19.5 *Der lineare Raum der Lösungen der homogenen Gleichung* (19.2) *n-ter Ordnung hat die Dimension n. Es gibt also n linear unabhängige Lösungen* $y_1, \ldots, y_n$ *von* (19.2)*, so dass sich jede Lösung y von* (19.2) *als Linearkombination*

$$y(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *schreiben läßt.*

Zur Erinnerung:

Definition 19.6 *Ein System von Funktionen* $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ *heißt* linear unabhängig*, wenn aus*

$$c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0 \quad \textit{für alle } x \in I$$

folgt, dass $c_1 = \ldots = c_n = 0$*. Anderenfalls heißen die Funktionen* $y_1, \ldots, y_n$ linear abhängig*.*

Ein linear unabhängiges System $y_1, \ldots, y_n$ von Lösungen der homogenen Gleichung (19.2) n-ter Ordnung heißt auch ein *Fundamentalsystem* oder eine *Integralbasis* der Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (19.2) anzugeben heißt also, ein Fundamentalsystem (oder eine Basis des Lösungsraumes) anzugeben. Im Fall $n = 1$ ist das einfach (vgl. Satz 18.3). Für $n \geq 2$ hat man dagegen keinen einfachen Algorithmus mehr, der ein Lösungsfundamentalsystem liefern könnte. Das folgende Verfahren der Ordnungsreduktion nach d'Alambert ist anwendbar, wenn *eine* nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung bekannt ist (die man beispielsweise durch Erraten oder durch einen speziellen Ansatz gefunden hat). Wir sehen uns dieses Verfahren für Gleichungen zweiter Ordnung an.

Sei etwa y_1 eine bekannte Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad \text{auf } I \tag{19.4}$$

mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Wir suchen eine weitere Lösung y_2 von (19.4) in der Form $y_2(x) = u(x)\,y_1(x)$ mit einer zu bestimmenden Funktion u. Dann ist

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \quad \text{sowie} \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'',$$

und eingesetzt in (19.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + au'y_1 + auy_1' + buy_1 \\ &= (y_1'' + ay_1' + by_1)u + (2y_1' + ay_1)u' + y_1u'' \\ &= y_1u'' + (2y_1' + ay_1)u'. \end{aligned}$$

Wir sehen: Ist $y_1(x) \neq 0$ auf I, so löst $y_2 = uy_1$ genau dann die Gleichung (19.4) auf I, wenn u die Gleichung

$$u'' + \Big(2\,\frac{y_1'}{y_1} + a\Big)u' = 0 \quad \text{auf } I \tag{19.5}$$

löst. Nach Substitution $u' = v$ geht (19.5) über in die Gleichung

$$v' + \Big(2\,\frac{y_1'}{y_1} + a\Big)v = 0 \quad \text{auf } I$$

erster Ordnung, die wir in Abschnitt 18.2.2 gelöst haben. Aus v erhalten wir u und hieraus y_2.

Beispiel 1 Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}\,y' + \frac{1}{2x^2}\,y = 0 \quad \text{auf } I = (0, \infty).$$

Durch Erraten finden wir die Lösung $y_1(x) = x$, und für diese ist $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Wir machen daher den Ansatz $y_2(x) = xu(x)$ und erhalten aus (19.5)

$$u'' + \Big(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\Big)u' = 0.$$

Sei $u' = v$. Die Gleichung

$$v' + \Big(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\Big)v = v' + \frac{3}{2x}\,v = 0$$

hat nach Satz 18.3 die allgemeine Lösung

$$v(x) = c\exp\Big(\int_1^x \big(-\frac{3}{2t}\big)\,dt\Big) = c\exp\Big(-\frac{3}{2}\ln x\Big) = cx^{-3/2}.$$

Für $c = -\frac{1}{2}$ ist $u(x) = x^{-1/2}$ eine Stammfunktion von v, und daher ist $y_2(x) = x\,u(x) = \sqrt{x}$ eine weitere Lösung der Ausgangsgleichung. ∎

Der folgende Satz sagt, dass dieses Verfahren tatsächlich funktioniert, d.h. dass man aus einer bekannten Lösung y_1 eine weitere, dazu *linear unabhängige* Lösung y_2 gewinnt.

Satz 19.7 (Ordnungsreduktion) *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter sei y_1 eine Lösung von (19.4) auf I mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ist u eine Lösung von (19.5), so ist auch $y_2(x) := u(x)y_1(x)$ eine Lösung von (19.4). Die Lösungen y_1 und y_2 sind linear unabhängig, wenn die Funktion u nicht konstant ist.*

Mit diesem Satz ist klar, dass die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \sqrt{x}$ tatsächlich ein Lösungsfundamentalsystem für die Gleichung aus Beispiel 1 bilden, d.h. man kann jede Lösung dieser Gleichung schreiben als

$$y(x) = c_1 x + c_2\sqrt{x} \quad \text{mit} \quad x > 0.$$

Ein bequemes Hilfsmittel, die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zu prüfen, ist die Wronski-Determinante.

Definition 19.8 *Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ seien $n-1$ mal differenzierbar auf I. Dann heißt*

$$W(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

die Wronski-Matrix *des Funktionensystems $y_1, \ldots, y_n$ und $(\det W)(x)$ seine* Wronski-Determinante.

Satz 19.9 *Sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ linear abhängig und $n-1$ mal differenzierbar, so ist $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in I$.*

Dies ist leicht zusehen, da dann eine Spalte der Wronski-Matrix linear abhängig von den übrigen Spalten wird.

Beispiel 2 Für die Funktionen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \sqrt{x}$ auf $I = (0, \infty)$ ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\det W)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0.$$

Also sind y_1 und y_2 tatsächlich linear unabhängige Lösungen der Gleichung aus Beispiel 1.

Beispiel 3 Seien $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2 - 2$ und $y_3(x) = 2x^2 + 3x - 4$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & x^2-2 & 2x^2+3x-4 \\ 1 & 2x & 4x+3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\det W)(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall liefert uns Satz 19.9 *keine* Information. Aus

$$y_3(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x)$$

folgt aber sofort die lineare Abhängigkeit der Funktionen y_1, y_2 und y_3. ■

Eine wesentlich präzisere Aussage als in Satz 19.9 erhält man unter der Voraussetzung, dass $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen einer linearen Differentialgleichung (und nicht irgendwelche Funktionen) sind.

Satz 19.10 *Seien $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung* (19.2). *Dann ist entweder*

a) $(\det W)(x) = 0$ *für alle $x \in I$ oder*

b) $(\det W)(x) \neq 0$ *für alle $x \in I$,*

und die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ bilden genau dann ein Lösungsfundamentalsystem, wenn Fall (b) vorliegt.

Ist unter den Voraussetzungen von Satz 19.10 also $(\det W)(x) \neq 0$ für *ein* $x \in I$, so ist $(\det W)(x) \neq 0$ für *alle* $x \in I$, und die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ sind linear unabhängig. Ist dagegen $(\det W)(x) = 0$ für *ein* $x \in I$, so ist $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in I$, und die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ sind linear abhängig.

Wir gehen nun zu inhomogenen Gleichungen über. Ihre Lösungsstruktur kann ähnlich wie in Satz 18.5 (für $n = 1$) beschrieben werden.

Satz 19.11 *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung* (19.1) *hat die Gestalt*

$$y(x) = y_h(x) + y^*(x),$$

wobei y^* eine spezielle Lösung von (19.1) *und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung* (19.2) *ist.*

Einen systematischen Weg zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (19.1) bietet die Methode der Variation der Konstanten. Dazu sei

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (19.2). Wir suchen eine spezielle Lösung von (19.1) in der Form

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $c_j : I \to \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} y' &= c_1'y_1 + c_1y_1' + \ldots + c_n'y_n + c_ny_n' \\ &= (c_1y_1' + \ldots + c_ny_n') + (c_1'y_1 + \ldots + c_n'y_n). \end{aligned}$$

Um die Rechnung übersichtlich zu halten, versuchen wir, die c_j so zu wählen, dass

$$c_1'y_1 + \ldots + c_n'y_n = 0$$

(später sehen wir, dass dies möglich ist). Dann bleibt also

$$y' = c_1y_1' + \ldots + c_ny_n',$$

und wir finden weiter

$$y'' = (c_1y_1'' + \ldots + c_ny_n'') + (c_1'y_1' + \ldots + c_n'y_n').$$

Wir fordern wieder

$$c_1'y_1' + \ldots + c_n'y_n' = 0.$$

Wir fahren so fort und erhalten

$$y^{(k)} = c_1y_1^{(k)} + \ldots + c_ny_n^{(k)} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

unter den Bedingungen

$$c_1'y_1^{(k)} + \ldots + c_n'y_n^{(k)} = 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-2.$$

Schließlich erhalten wir für die n-te Ableitung

$$y^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + \ldots + c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)}).$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die inhomogene Gleichung (19.1) ein und finden

$$\begin{array}{rlrcl} b &= y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} & + \ldots + & a_1y' + a_0y & \\ &= \qquad\qquad (c_1y_1^{(n)} & + \ldots + & c_ny_n^{(n)}) & + (c_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)}) \\ & + \; a_{n-1}(c_1y_1^{(n-1)} & + \ldots + & c_ny_n^{(n-1)}) & \\ & + & \vdots & & \\ & + \qquad a_1(c_1y_1' & + \ldots + & c_ny_n') & \\ & + \qquad a_0(c_1y_1 & + \ldots + & c_ny_n), & \end{array}$$

also
$$c_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = b,$$
da ja jede Funktion y_j die homogene Gleichung
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$$
löst. Damit haben wir das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Ableitungen c_j' gewonnen:
$$\begin{array}{rcl}
c_1'y_1 + \ldots + \quad c_n'y_n & = & 0 \\
c_1'y_1' + \ldots + \quad c_n'y_n' & = & 0 \\
\vdots & & \\
c_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)} & = & 0 \\
c_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} & = & b
\end{array}$$
bzw.
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \tag{19.6}$$
Dieses System ist eindeutig lösbar, da seine Systemmatrix die Wronski-Matrix der Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ ist. Diese hat nach Satz 19.10 eine Determinante ungleich 0 und ist daher invertierbar. Aus (19.6) lassen sich die Ableitungen $c_1', \ldots, c_n'$ eindeutig ermitteln. Durch Integration bekommen wir Stammfunktionen $c_1, \ldots, c_n$, und man überzeugt sich leicht davon, dass
$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$
tatsächlich eine Lösung von (19.1) ist.

Beispiel 4 Wir suchen die allgemeine Lösung von
$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = x \quad \text{auf } I = (0, \infty). \tag{19.7}$$
Aus Beispiel 1 und 2 wissen wir, dass $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \sqrt{x}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene Gleichung bilden. Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählen wir den Ansatz
$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

und bestimmen c_1', c_2' aus

$$\begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & -\sqrt{x} \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -x \\ x\sqrt{x} \end{pmatrix} ,$$

also

$$c_1'(x) = 2x \quad \text{und} \quad c_2'(x) = -2x^{3/2}.$$

Stammfunktionen sind

$$c_1(x) = x^2 \quad \text{und} \quad c_2(x) = -\frac{4}{5}x^{5/2}$$

(da wir nur eine spezielle Lösung suchen, können wir die Integrationskonstanten z.B. gleich 0 wählen). Also ist

$$y^*(x) = x^2 \cdot x - \frac{4}{5}x^{5/2} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^3$$

eine spezielle Lösung von (19.7), und die allgemeine Lösung von (19.7) ist

$$y(x) = c_1 x + c_2\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3.$$

■

Beispiel 5 Das Anfangswertproblem

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{19.8}$$

hat nach Satz 19.3 auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ eine eindeutige Lösung. Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ wird gebildet von den Funktionen $y_1(x) = \cos x$ und $y_2(x) = \sin x$. Die Lösungen c_1', c_2' des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

sind $c_1'(x) = -\tan x$ und $c_2'(x) = 1$. Integration liefert

$$c_1(x) = \ln(\cos x) \quad \text{und} \quad c_2(x) = x,$$

d.h. die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \sin x$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Diese Konstanten bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen und erhalten $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$, so dass

$$y(x) = \sin x + \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \sin x$$

die Lösung des AWP (19.8) ist. ■

19.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b \tag{19.9}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite b ist weiterhin eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. In dieser speziellen Situation gibt es eine systematische Methode zur Bestimmung eines Lösungsfundamentalsystems der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{19.10}$$

und auch das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist oft einfacher zu gestalten als über eine Variation der Konstanten.

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von (19.10) wählen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit einem zu bestimmenden (reellen oder komplexen) Parameter λ. Setzt man diese Funktion und ihre Ableitungen $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ in (19.10) ein, so erhält man

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

bzw. wegen $e^{\lambda x} \neq 0$

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{19.11}$$

Dieses Polynom P heißt das *charakteristische Polynom* der homogenen Gleichung (19.10). Offenbar ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung von (19.10), wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Sind alle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von P reell und einfach, dann erhält man auf diese Weise n Lösungen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x},$$

die linear unabhängig sind und daher ein Lösungsfundamentalsystem für (19.10) bilden. Ist $\lambda = \alpha + \beta i$ eine komplexe Nullstelle mit $\beta > 0$, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ eine Nullstelle von P, und man erhält die beiden Lösungen

$$y_+(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} \quad \text{und} \quad y_-(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Da die Lösungsmenge von (19.10) ein linearer Raum ist, sind mit y_+ und y_- auch

$$\operatorname{Re} y_+ = \frac{y_+ + y_-}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} y_+ = \frac{y_+ - y_-}{2i}$$

Lösungen von (19.10). Aus dem Paar $(\lambda, \overline{\lambda})$ konjugiert komplexer Nullstellen von P gewinnen wir also zwei reellwertige Lösungen

$$y_1(x) = \operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)x}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

und

$$y_2(x) = \operatorname{Im}\left(e^{(\alpha+\beta i)x}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ist λ eine Nullstelle der Ordnung k, so entsprechen dieser Nullstelle k linear unabhängige Lösungen von (19.10), die man wie folgt gewinnt:

Satz 19.12 a) *Ist λ eine k-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms P von* (19.10), *so hat* (19.10) *die k linear unabhängigen Lösungen*

$$y_1(x) = e^{\lambda x},\ y_2(x) = xe^{\lambda x}, \dots,\ y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}. \tag{19.12}$$

b) *Ist $\lambda = \alpha + \beta i$ mit $\beta > 0$ eine k-fache komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms P von* (19.10), *so besitzt* (19.10) *die $2k$ linear unabhängigen Lösungen*

$$\begin{aligned} &y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots,\ y_k(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &\textit{und} \\ &y_{k+1}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2}(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots,\ y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{19.13}$$

c) *Aus den (entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach gezählten) Nullstellen von P erhält man mit (a) und (b) genau n Funktionen, die zusammen ein Lösungsfundamentalsystem für* (19.10) *bilden.*

Beispiel 6 Die Differentialgleichung $y'''' + 2y''' - 2y' - y = 0$ hat das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Also bilden die Funktionen

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = xe^{-x} \text{ und } y_4(x) = x^2e^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4x^2e^{-x}.$$

■

Beispiel 7 Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ der Differentialgleichung $y'''' = y$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i$. Hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = \cos x,\ y_4(x) = \sin x.$$

■

Beispiel 8 Das charakteristische Polynom der *Schwingungsgleichung*

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{mit } \omega > 0$$

lautet $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$. Also bilden die Funktionen $y_1(x) = \cos\omega x$ und $y_2(x) = \sin\omega x$ ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen (reine Schwingung). Wir betrachten nun allgemeiner die Differentialgleichung

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{mit } \mu \geq 0 \text{ und } \omega_0 > 0$$

der *gedämpften Schwingung*. Diese Gleichung modelliert z.B. eine Masse, die an einer Feder schwingt, wobei μ der Reibungskoeffizient und ω_0^2 die Federkonstante ist. Wie wir bereits gesehen haben, hat diese Gleichung für $\mu = 0$ das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = \cos \omega_0 x \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin \omega_0 x.$$

Die Zahl ω_0 ist also die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Von nun an sei $\mu > 0$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$ sind

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

wobei $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ im Fall $\mu^2 < \omega_0^2$ für $i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ steht. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: $0 < \mu < \omega_0$ (*gedämpfte Schwingung*)
Wir setzen $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ und erhalten das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_1 = -\mu + i\omega$ und $\lambda_2 = -\mu - i\omega$. Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-\mu x} \cos \omega x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-\mu x} \sin \omega x.$$

Durch die Dämpfung wird also die Frequenz kleiner, und die Lösungen klingen exponentiell ab.

Fall 2: $\mu = \omega_0$ (*aperiodischer Grenzfall*)
In diesem Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ eine doppelte Nullstelle und demzufolge

$$y_1(x) = e^{-\mu x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x e^{-\mu x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem. Wir beobachten kein Schwingungsverhalten mehr.

Fall 3: $\mu > \omega_0$ (*aperiodischer Fall*)
Nun haben wir zwei einfache reelle Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$, die wegen $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < \mu$ beide negativ sind. Ein Fundamentalsystem ist

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

und alle Lösungen klingen exponentiell ab. ■

Wir kommen nun zu inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Eine spezielle Lösung kann natürlich wieder mittels Variation der Konstanten gefunden werden. Bei speziellen rechten Seiten b ist es einfacher, einen *Ansatz vom Typ der Störfunktion* zu wählen. Das funktioniert z.B. für

$$\begin{aligned} b(x) &= e^{\alpha x}\cos\beta x(a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0) \\ \text{und} \\ b(x) &= e^{\alpha x}\sin\beta x(a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0), \end{aligned} \tag{19.14}$$

insbesondere also für Polynome, Exponentialfunktionen und die Sinus- und Kosinusfunktion. In diesen Fällen gibt es eine spezielle Lösung y^* der inhomogenen Gleichung, die vom gleichen Typ wie b ist. Dabei hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1 Ist $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so gibt es eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt

$$y^*(x) = e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) + \sin\beta x(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)\big)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten A_i und B_j.

Fall 2 Ist $\alpha + i\beta$ eine Nullstelle der Ordnung k des charakteristischen Polynoms, so gibt es eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) + \sin\beta x(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)\big)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten A_i und B_j.

Ist die rechte Seite eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt (19.14), so wählt man eine Linearkombination der Ansätze aus Fall 1 und 2 als Ansatz.

Beispiel 9 Die Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + y' = x + 2e^{-x} \tag{19.15}$$

hat das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$ mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Folglich bilden die Funktionen

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_3(x) = xe^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der zu (19.15) gehörenden homogenen Gleichung. Um die inhomogene Gleichung (19.15) zu lösen, suchen wir spezielle Lösungen der Gleichungen

$$y''' + 2y'' + y' \;=\; x = xe^{0\cdot x}, \tag{19.16}$$

$$y''' + 2y'' + y' \;=\; 2e^{-x}. \tag{19.17}$$

Nach Fall 2 hat (19.16) eine spezielle Lösung der Gestalt $y_{i,1}(x) = c_1 x + c_2 x^2$. Wegen

$$y_{i,1}''' + 2y_{i,1}'' + y_{i,1}' = 0 + 2\cdot 2c_2 + (c_1 + 2c_2 x) = (c_1 + 4c_2) + 2c_2 x$$

löst $y_{i,1}$ genau dann (19.16), wenn $2c_2 = 1$ und $c_1 + 4c_2 = 0$, also wenn $c_2 = 1/2$ und $c_1 = -2$. Ebenfalls nach Fall 2 hat (19.17) eine spezielle Lösung der Gestalt $y_{i,2}(x) = dx^2e^{-x}$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'_{i,2}(x) &= d(2x - x^2)e^{-x}, \quad y''_{i,2}(x) = d(2 - 4x + x^2)e^{-x}, \\ y'''_{i,2}(x) &= d(-6 + 6x - x^2)e^{-x}, \end{aligned}$$

und Einsetzen in (19.17) ergibt

$$d\big((-6 + 6x - x^2) + 2(2 - 4x + x^2) + (2x - x^2)\big)e^{-x} = 2e^{-x}$$

und $d = -1$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (19.15) ist also

$$y_i(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 - x^2e^{-x}.$$

■

Beispiel 10 Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = a\cos\omega x \quad \text{mit } \omega_0, \omega > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R} \tag{19.18}$$

beschreibt die Bewegung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 unter Wirkung einer periodischen äußeren Kraft $a\cos\omega x$. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall A: $\omega \neq \omega_0$. Dann ist $i\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$. Nach Fall 1 gibt es also eine spezielle Lösung (19.18) der Form $y_i(x) = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$. Ableiten und Einsetzen in (19.18) ergibt

$$-c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x + \omega_0^2c_1\cos\omega x + \omega_0^2c_2\sin\omega x = a\cos\omega x,$$

und nach Vergleich der Koeffizienten vor den Sinus- und Kosinustermen erhalten wir

$$c_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0, \quad c_1(\omega_0^2 - \omega^2) = a.$$

Also ist $c_1 = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$ und $c_2 = 0$, und

$$y_i(x) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega x$$

ist eine Lösung von (19.18).

Fall B: $\omega = \omega_0$. Nun ist $i\omega$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Entsprechend Fall 2 gibt es also eine Lösung von (19.18) der Gestalt

$$y_i(x) = b_1x\cos\omega x + c_1x\sin\omega x.$$

Mit dem Ansatz

$$y_i(x) = bx\cos\omega x + cx\sin\omega x$$

wird

$$\begin{aligned} y_i'(x) &= (cx\omega + b)\cos\omega x + (c - bx\omega)\sin\omega x, \\ y_i''(x) &= (2c\omega - bx\omega^2)\cos\omega x - (2b\omega + cx\omega^2)\sin\omega x, \end{aligned}$$

und nach Einsetzen und Koeffizientenvergleich folgt

$$2c\omega = a \quad \text{und} \quad -2b\omega = 0,$$

also $c = \frac{a}{2\omega}$ und $b = 0$. Eine Lösung von (19.18) ist in diesem Fall also

$$y_i(x) = \frac{a}{2\omega} x \sin\omega x.$$

Im Fall $a \neq 0$ wächst die Amplitude dieser Funktion über alle Grenzen, und man spricht von einer *Resonanzkatastrophe*.

19.3 Systeme linearer Differentialgleichungen

In der Praxis treten oft Systeme von Differentialgleichungen auf, d.h. man sucht mehrere Funktionen, die durch mehrere Differentialgleichungen miteinander verknüpft sind. Oft ist es auch zweckmäßig, sich eine Differentialgleichung höherer Ordnung als ein System von Differentialgleichungen niedriger Ordnung vorzustellen. Gegeben sei eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{19.19}$$

Ist y eine Lösung dieser Differentialgleichung, so erfüllen die Funktionen

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := y'(x), \ldots, \quad y_n(x) := y^{(n-1)}(x)$$

das folgende System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{19.20}$$

Hat man umgekehrt eine Lösung $\vec{y}(x) = \big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)^T$ des Systems (19.20) gefunden, so ist die erste Komponente y_1 von $\vec{y}$ eine Lösung von (19.19). In diesem Sinn sind die Gleichung (19.19) n-ter Ordnung und das System (19.20) erster Ordnung zueinander äquivalent. Kommen zu (19.19) noch die Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

hinzu, so entsprechen diese der Anfangsbedingung

$$y_1(x_0) = \alpha_0, \quad y_2(x_0) = \alpha_1, \ldots, \quad y_n(x_0) = \alpha_{n-1}$$

bzw. $\vec{y}(x_0) = \vec{\alpha}$ mit $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^T$ für das System (19.20). Ein Vorteil von (19.20) gegenüber (19.19) ist, dass man den allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf leicht auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern kann. Auch gibt es für Systeme erster Ordnung zahlreiche effektive numerische Lösungsverfahren.

Der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

entspricht das System

$$\begin{array}{rcccccccc}
y_1' & = & & y_2 & & & & & \\
y_2' & = & & & y_3 & & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & & & \\
y_{n-1}' & = & & & & & & y_n & \\
y_n' & = & -a_0y_1 & -a_1y_2 & -a_2y_3 & \ldots & & -a_{n-1}y_n & +b(x),
\end{array}$$

welches wir mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \tag{19.21}$$

kurz als $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ schreiben können. Allgemein versteht man unter einem *linearen System erster Ordnung* ein System der Gestalt $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ mit einer $n \times n$-Matrix A, einer rechten Seite $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$ und einer gesuchten Lösung $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Die Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ heißt das zu $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ *gehörende homogene System*. Wie bei allen linearen Gleichungen setzt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Über die Lösungsstruktur der homogenen Systeme gibt folgender Satz Auskunft.

Satz 19.13 a) *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Menge der Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ bildet einen linearen Raum der Dimension n. Eine Basis $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ dieses Raumes heißt ein* Fundamentalsystem.

b) *Besitzt* A *die Eigenwerte* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *mit zugehörigen Eigenvektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$*, so sind die Funktionen*

$$\vec{y}_1(x) := e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1, \ldots, \quad \vec{y}_n(x) := e^{\lambda_n x}\vec{v}_n$$

Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$*. Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem, wenn die* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *linear unabhängig sind.*

Dieser Satz liefert nur dann explizit ein Fundamentalsystem, wenn die Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, d.h. wenn A diagonalähnlich ist. Für die Matrix A in (19.21) ist dies z.B. genau dann der Fall, wenn ihre Eigenwerte paarweise verschieden sind. Ist A eine reelle Matrix und $\lambda, \overline{\lambda}$ ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte von A, so erhält man aus der *komplexen* Lösung $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ nach Satz 19.13 zwei reelle Lösungen durch Bildung von Real- und Imaginärteil von $\vec{y}$.

Ist $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ ein Fundamentalsystem für das homogene System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, so kann man jede Lösung dieses Systems schreiben als Linearkombination

$$\vec{y}_h(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_n\vec{y}_n(x). \tag{19.22}$$

Eine Lösung $\vec{y}_i$ der inhomogenen Gleichung kann man bestimmen, indem man in (19.22) die Konstanten c_i variiert, d.h. durch den Ansatz

$$\vec{y}_i(x) = c_1(x)\vec{y}_1(x) + \ldots + c_n(x)\vec{y}_n(x).$$

Beispiel 11 Zur Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 0$ ist das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{19.23}$$

äquivalent. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1 = (1,1)^T$ und $\vec{v}_2 = (1,2)^T$. Ein Fundamentalsystem für (19.23) wird also gebildet von den Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Als allgemeine Lösung von (19.23) erhält man daher

$$\vec{y}_h(x) = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist die erste Komponente

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

von $\vec{y}_h(x)$. ■

Beispiel 12 Die Koeffizientenmatrix des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned} \tag{19.24}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1+2i$ und $\lambda_2 = 1-2i$, und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Also ist

$$\vec{y}(x) = e^{(1+2i)x} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

eine komplexe Lösung von (19.24), und ihr Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(x) &= e^x \left(\cos 2x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \\ \vec{y}_2(x) &= e^x \left(\cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem von (19.24). ■

Beispiel 13 Ganz ähnlich wie in Beispiel 12 gewinnt man für das System

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1$$

ein Lösungsfundamentalystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \tag{19.25}$$

Um das inhomogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned} \tag{19.26}$$

zu lösen, wählen wir den Ansatz

$$\vec{y}(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

d.h. wir variieren in (19.25) die Konstanten. Setzt man

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} c_1' \cos x - c_1 \sin x - c_2' \sin x - c_2 \cos x \\ c_1' \sin x + c_1 \cos x + c_2' \cos x - c_2 \sin x \end{pmatrix}$$

in (19.26) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für c_1' und c_2'

$$\begin{aligned} c_1' \cos x - c_2' \sin x &= 0 \\ c_1' \sin x + c_2' \cos x &= x \end{aligned}$$

mit den Lösungen $c_1' = x \sin x$ und $c_2' = x \cos x$. Stammfunktionen sind

$$c_1(x) = -x \cos x + \sin x \quad \text{und} \quad c_2(x) = x \sin x + \cos x.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (19.26) ist daher

$$\vec{y}_i(x) = (-x \cos x + \sin x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + (x \sin x + \cos x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 14 Einfacher als die Anwendung von Satz 19.13 und auch hilfreich in Fällen, in denen Satz 19.13 kein Fundamentalsystem liefert (da A nicht diagonalähnlich ist) ist oft das *Eliminationsverfahren*, welches wir uns am Beispiel des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= \qquad\; y_2 \end{aligned} \tag{19.27}$$

ansehen. Die Koeffizientenmatrix $A = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ als doppelten Eigenwert; der zugehörige Eigenunterraum hat aber die Dimension 1 und wird z.B. durch $\vec{v} = \binom{1}{0}$ aufgespannt. Satz 19.13 liefert also keine Fundamentalsystem. Stattdessen versuchen wir, y_2 aus dem System zu eliminieren. Aus der ersten Gleichung folgt durch Umstellen und Ableiten

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1' - \frac{1}{2} y_1 \quad \text{und} \quad y_2' = \frac{1}{2} y_1'' - \frac{1}{2} y_1',$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\frac{1}{2} y_1'' - \frac{1}{2} y_1' = \frac{1}{2} y_1' - \frac{1}{2} y_1 \quad \text{bzw.} \quad y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0.$$

Ein Fundamentalsystem dieser Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist nach Satz 19.12

$$y_{11}(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_{12}(x) = xe^x,$$

und mit $y_2 = \frac{1}{2}y_1' - \frac{1}{2}y_1$ erhält man hieraus

$$y_{21} = 0 \quad \text{und} \quad y_{22}(x) = e^x/2.$$

Somit ist

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x/2 \end{pmatrix} \tag{19.28}$$

ein Fundamentalsystem für (19.27). ∎

Eine Begründung, dass die Funktionen $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ in (19.28) tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden (also linear unabhängig sind), kann man mit der folgenden Variante des *Satzes von Wronski* geben.

Satz 19.14 *Sei A eine $n \times n$-Matrix, und $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ seien Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Weiter sei $\Phi(x)$ die $n\times n$-Matrix, deren Spalten die Vektoren $\vec{y}_1(y), \dots, \vec{y}_n(x)$ sind. Ist $(\det \Phi)(x) \neq 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so sind die Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ linear unabhängig. Ist $(\det \Phi)(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so ist $(\det \Phi)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ sind linear abhängig.*

Offenbar ist tatsächlich in Beispiel 14

$$\det \Phi = \det \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Matrix Φ läßt sich auch die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ bequem schreiben als

$$\vec{y}(x) = \Phi(x)c \quad \text{mit} \quad c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R},$$

und die Bestimmung von $c(x)$ aus dem Ansatz $\vec{y}(x) = \Phi(x)c(x)$ zur Lösung der inhomogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ kann durch

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)\, dt$$

erfolgen. Lösen Sie das System aus Beispiel 13 erneut, indem Sie diese Formel mit $x_0 = 0$ und $c(x_0) = \binom{0}{1}$ verwenden.

19.4 Die Laplace-Transformation

Wir lernen nun eine weitere Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen kennen, die insbesondere bei linearen Differentialgleichungen und Systemen mit konstanten Koeffizienten einsetzbar ist. So wie man durch Logarithmieren das Multiplizieren und Potenzieren positiver reeller Zahlen auf die Addition und Multiplikation ihrer Logarithmen zurückführen kann, so führt die Laplace-Transformation die Differentiation einer reellen Funktion auf eine einfache algebraische Operation zurück.

Definition 19.15 *Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt* Laplace-transformierbar, *wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, für die das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty e^{-ts} |f(t)| \, dt = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-ts} |f(t)| \, dt \tag{19.29}$$

konvergiert.

Ist f Laplace-transformierbar und konvergiert das Integral (19.29) für ein $s \in \mathbb{R}$, so konvergiert es auch für alle $s' > s$. Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Zahl $a = a(f)$ so, dass (19.29) für jedes $s > a$ konvergiert und für jedes $s < a$ divergiert (für $s = a$ kann man im Allgemeinen keine Aussage treffen). Diese Zahl a heißt die *Konvergenzabszisse von f*, und (a, ∞) das Konvergenzintervall.

Definition 19.16 *Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei Laplace-transformierbar, und a sei ihre Konvergenzabszisse. Dann heißt die durch*

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-ts} f(t) \, dt$$

definierte Funktion $F : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte *von f.*

Wir schreiben dann $F = \mathcal{L}f$ und nennen die Abbildung $\mathcal{L}$ die *Laplace-Transformation*. Ist f Laplace-transformierbar und unterscheidet sich g von f nur in endlich vielen Punkten, so ist auch g Laplace-transformierbar und $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$. Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ ist also nicht ohne weiteres umkehrbar. Wenden wir aber $\mathcal{L}$ nur auf Funktionen f an, die stetig oder wenigstens stückweise stetig und von rechts stetig sind, so ist auf dieser Menge die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ umkehrbar, und wir schreiben $f = \mathcal{L}^{-1}F$ falls $F = \mathcal{L}f$. Im weiteren betrachten wir daher ausschließlich stückweise stetige und von rechts stetige Laplace-transformierbare Funktionen f.

Beispiel 15 Für die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ und $s \neq 0$, ist

$$\int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{r \to \infty} \frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_0^r = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{für } s > 0, \\ \infty & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

Also ist $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s}$, und die Konvergenzabszisse von f ist gleich 0. Für die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{at}$ erhält man analog

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a}$$

mit der Konvergenzabszisse a. Dagegen ist die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ *nicht* Laplace-transformierbar, da das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{(t-s)t}dt$$

für kein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert. ■

Wir lernen nun eine Reihe von Rechenregeln kennen, die es erlauben, Laplace-Transformierte zu berechnen, ohne das uneigentliche Integral (19.29) auswerten zu müssen.

Satz 19.17 (Linearität und Streckung) *Die Funktionen f, g seien Laplace-transformierbar. Dann gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $c > 0$*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(af + bg) &= a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g, \\ \mathcal{L}\big(f(ct)\big)(s) &= \frac{1}{c}(\mathcal{L}f)\big(\frac{s}{c}\big). \end{aligned}$$

Beispiel 16 Die Laplacetransformierten von

$$f(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

sind

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^t)(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\big) = \frac{s}{s^2-1}$$

und $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Die Laplacetransformierte von $f(t) = \cosh(ct)$ mit $c > 0$ ist

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}(\cosh t)\big(\frac{s}{c}\big) = \frac{1}{c}\,\frac{(s/c)}{(s/c)^2 - 1} = \frac{s}{s^2 - c^2},$$

und die Laplace-Transformierte von $g(t) = \sinh(ct)$ ist $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{c}{s^2-c^2}$. ■

Wir sagen, f wächst nicht schneller als eine Exponentialfunktion, wenn es Konstanten C und α so gibt, dass

$$|f(t)| \le Ce^{\alpha t} \quad \text{für alle hinreichend großen } t.$$

Satz 19.18 (Differentiation und Integration) *Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten F. Dann gilt:*

a) *Sei f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und von rechts stetig in 0 und f wachse nicht schneller als eine Exponentialfunktion. Dann ist*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0).$$

b) *Ist f auf $(0,\infty)$ n mal differenzierbar mit im Nullpunkt von rechts stetigen Ableitungen $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ und wachsen diese nicht schneller als eine Exponentialfunktion, so ist*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

c) *Die Stammfunktion $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ hat die Laplace-Transformierte*

$$(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

Beispiel 17 Die Funktion $f(t) = t^n$ hat die n-te Ableitung $f^{(n)}(t) = n!$. Nach Beispiel 15 ist

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = \frac{n!}{s}.$$

Mit Satz 19.18 (b) folgt hieraus für $F(s) = (\mathcal{L}f)(s)$

$$\frac{n!}{s} = s^n F(s), \quad \text{also} \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Für ein Polynom

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

hat man daher die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}p)(s) = \frac{a_n n!}{s^{n+1}} + \frac{a_{n-1}(n-1)!}{s^n} + \ldots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 18 Aus $(\sin t)'' = -\sin t$ folgt mit Satz 19.18 (b)

$$s^2 \mathcal{L}(\sin t)(s) - 1 = -\mathcal{L}(\sin t)(s)$$

und nach Umstellen nach $\mathcal{L}(\sin t)(s)$

$$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Ganz ähnlich erhält man $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}$. $\blacksquare$

Beispiel 19 Die Potenzfunktion $f(t) = t^\alpha$ mit $\alpha \geq 0$ hat die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha\,dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s}\,du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha\,du.$$

Dieses Integral ist verwandt mit der *Eulerschen Gammafunktion*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du, \quad x > 0,$$

einer der wichtigsten Funktionen der Analysis. Mit dieser Funktion erhält man

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{19.30}$$

Ein Vergleich mit Beispiel 17 ergibt (mit $\alpha = n \in \mathbb{N}$)

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Gammafunktion interpoliert also die Fakultätsfunktion, die nur für ganzzahlige Argumente $n \geq 0$ erklärt ist. Aus $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$ folgt mit Satz 19.18 (a) und (19.30)

$$\mathcal{L}(\alpha t^{\alpha-1})(s) = \mathcal{L}\big((t^\alpha)'\big)(s) = s\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha},$$

während andererseits

$$\mathcal{L}(\alpha t^{\alpha-1})(s) = \alpha\mathcal{L}(t^{\alpha-1})(s) = \alpha\,\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}$$

ebenfalls wegen (19.30). Also ist

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{für } \alpha \geq 1.$$

Diese Gleichung erlaubt die Berechnung von $\Gamma(\alpha+k)$ für ganzzahliges $k > 0$, falls $\Gamma(\alpha)$ bekannt ist. Beispielsweise ist

$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\Gamma(1/2)}{2s^{3/2}},$$

und die Berechnung von $\Gamma(1/2)$ führt mit einer Variablensubstitution auf

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2}\, du = \int_0^\infty e^{-x^2}\, \frac{1}{x}\, 2x\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Die nicht ganz einfache Berechnung von $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ kann mit einem Trick geschehen. Sei $\mathcal{J}_b := \int_0^b e^{-x^2} dx$. Dann ist

$$\mathcal{J}_b^2 = \int_0^b e^{-x^2}\, dx \int_0^b e^{-y^2}\, dy = \iint_G e^{-x^2-y^2}\, d(x,y)$$

mit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b\}$. Seien

$$G_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

und
$$G_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2b^2\}.$$
Dann sind G_1, G_2 Viertel von Kreisscheiben mit $G_1 \subseteq G \subseteq G_2$, und folglich ist
$$\iint_{G_1} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) \leq \mathcal{J}_b^2 \leq \iint_{G_2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y). \tag{19.31}$$
Diese Integrale können bequem mit Polarkoordinaten berechnet werden. Z.B. ist
$$\begin{aligned}\iint_{G_1} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) &= \int_0^b \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\, d\varphi\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^b e^{-r^2}(2r)\, dr \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-r^2})\Big|_0^b = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-b^2}),\end{aligned}$$
so dass aus (19.31)
$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-b^2}) \leq \mathcal{J}_b^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2b^2})$$
wird. Grenzübergang $b \to \infty$ liefert
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \mathcal{J}_b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
Damit ist $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und
$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}.$$
■

Satz 19.19 (Dämpfung und Verschiebung)

a) *Ist f Laplace-transformierbar, $a \in \mathbb{R}$ und $F = \mathcal{L}f$, so ist*
$$\mathcal{L}\big(e^{-at} f(t)\big)(s) = F(s+a).$$

b) *Die Laplace-Transformierte der um $a > 0$ verschobenen Funktion*
$$f_a(t) := \begin{cases} f(t-a) & \textit{falls } t \geq a \\ 0 & \textit{falls } t < a \end{cases}$$
ist $(\mathcal{L}f_a)(s) = e^{-as}F(s)$.

Beispiel 20 Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

heißt *Heaviside-Funktion*. Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = h(t) - h(t-a)$$

mit $a > 0$ (Rechteckimpuls) hat die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(h)(s) - \mathcal{L}(h_a)(s) = \frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-as}}{s}.$$

Der um $2ka$ verschobene Rechteckimpuls

$$f_{2ka}(t) = h(t-2ka) - h(t-a-2ka)$$

hat dann die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f_{2ka})(s) = e^{-2kas}\frac{1-e^{-as}}{s}.$$

Hieraus folgt für die Laplace-Transformierte der Rechteckschwingung

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(h(t-2ka) - h(t-(2k+1)a)\big)$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kas}\frac{1-e^{-as}}{s} = \frac{1-e^{-as}}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1}{s(1+e^{as})}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 21 Wegen $\mathcal{L}(\cos\omega t)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ist nach dem Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}(e^{-at}\cos\omega t)(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}. \qquad \blacksquare$$

Für zwei stückweise stetige Funktionen $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt die durch

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx$$

definierte Funktion $f * g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die *Faltung* von f und g.

Satz 19.20 (Faltung) *Sind f, g Laplace-transformierbar mit $\mathcal{L}f = F$ und $\mathcal{L}g = G$, so ist*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)\cdot G(s).$$

Beispiel 22 Aus $\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$ folgt mit dem Faltungssatz

$$\mathcal{L}(\sqrt{t} * \sqrt{t})(s) = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{s^3}.$$

Andererseits ist nach Beispiel 17 $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{4}\frac{\pi}{s^3})(t) = \frac{\pi}{4}\frac{t^2}{2}$. Also ist

$$\int_0^t \sqrt{(t-x)x}\, dx = \frac{\pi}{8}t^2. \qquad \blacksquare$$

Wir sehen uns nun an einigen Beispielen an, wie sich die Laplace-Transformation zur Lösung linearer Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten einsetzen läßt.

Beispiel 23 Seien $p, y_0 \in \mathbb{R}$. Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das AWP

$$y' + py = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0$$

liefert die Gleichung

$$s(\mathcal{L}y)(s) - y_0 + p(\mathcal{L}y)(s) = (\mathcal{L}f)(s)$$

mit der Lösung

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{(\mathcal{L}f)(s) + y_0}{s+p}.$$

Rücktransformation ergibt formal

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{L}f)(s) + y_0}{s+p}\right)(t).$$

Beispielsweise findet man für das AWP

$$y' + 3y = \cos 5t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{\frac{s}{s^2+25} + 1}{s+3} = \frac{s^2+s+25}{(s+3)(s^2+25)}.$$

Da nicht unmittelbar ersichtlich ist, wie die Rücktransformation dieser rationalen Funktion aussieht, zerlegen wir sie in einfachere Summanden, deren Rücktransformation wir kennen. Dazu führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned}\frac{s^2+s+25}{(s+3)(s^2+25)} &= \frac{1}{34}\left(\frac{31}{s+3} + \frac{3s+25}{s^2+25}\right) \\ &= \frac{1}{34}\left(31\,\frac{1}{s+3} + 3\,\frac{s}{s^2+25} + 5\,\frac{5}{s^2+25}\right).\end{aligned}$$

Also ist nach Beispiel 15 und 18 und dem Streckungssatz

$$y(t) = \frac{1}{34}(31e^{-3t} + 3\cos 5t + 5\sin 5t). \qquad \blacksquare$$

Beispiel 24 Das AWP 2. Ordnung

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 \quad \text{und} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

führt nach Laplace-Transformation und mit $Y := \mathcal{L}y$ auf

$$s^2 Y(s) - sy_0 - y_1 + p\big(sY(s) - y_0\big) + qY(s) = (\mathcal{L}f)(s)$$

mit der Lösung

$$(\mathcal{L}y)(s) = Y(s) = \frac{(\mathcal{L}f)(s) + sy_0 + y_1 + py_0}{s^2 + ps + q}.$$

Die Lösung y des AWP erhält man durch Laplace-Rücktransformation. ■

Beispiel 25 Das lineare System

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 + 2y_2 + 1 \\ y_2' & = & -2y_1 - y_2 - e^{-t} \end{array} \quad \text{mit} \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

geht nach Laplace-Transformation und mit den Abkürzungen $Y_1 = \mathcal{L}y_1$ und $Y_2 = \mathcal{L}y_2$ über in das System

$$\begin{array}{rcl} sY_1(s) & = & 3Y_1(s) + 2Y_2(s) + \dfrac{1}{s}, \\ sY_2(s) & = & -2Y_1(s) - Y_2(s) - \dfrac{1}{s+1}, \end{array}$$

dessen Lösungen die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} Y_1(s) & = & \dfrac{s^2+1}{s(s+1)(s-1)^2} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2(s+1)} - \dfrac{1}{2(s-1)} + \dfrac{1}{(s-1)^2}, \\ Y_2(s) & = & \dfrac{-s^2+s-2}{s(s+1)(s-1)^2} = -\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{(s-1)^2} \end{array}$$

sind. Die zugehörigen Originalfunktionen sind

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + te^t, \quad y_2(t) = -2 + e^{-t} + e^t - te^t.$$ ■

Die Schwierigkeit bei der Anwendung der Laplacetransformation liegt oft in der Durchführung der Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$.