18 Differentialgleichungen

Mit den Differentialgleichungen haben die Mathematiker ein Werkzeug geschaffen, mit dem die zeitliche Entwicklung zahlreicher System in Natur, Technik und Gesellschaft beschrieben werden kann. Ein zeitabhängiges System, das durch N reelle Parameter charakterisiert wird, wird zum Zeitpunkt t durch einen Vektor $y(t) \in \mathbb{R}^N$ modelliert. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird dann durch den Weg $y : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ beschrieben. Es ist in der Regel schwierig, diese Wege explizit anzugeben. Die Modellierung des Systems liefert aber oft eine Gleichung der Gestalt

$$y'(t) = f\bigl(t, y(t)\bigr)$$

oder allgemeiner

$$y^{(n)}(t) = f\bigl(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\bigr).$$

Dies sind *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, und ihre Lösungen sind Funktionen. Das Wort „gewöhnlich" bedeutet, dass die gesuchten Funktionen nur von *einer* Veränderlichen (etwa der Zeit t) abhängen. Gleichungen, deren Lösungen Funktionen *mehrerer* Veränderlicher sind und die partielle Ableitungen dieser Funktion enthalten, heißen *partielle Differentialgleichungen*. Beispiele dafür sind die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

und die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

im Raum. Die gesuchte Funktion y hängt hier von der Zeit t und den räumlichen Variablen x_1, x_2, x_3 ab. In diesem und den nächsten Kapiteln befassen wir uns ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen.

18.1 Grundbegriffe und Beispiele

Wir sehen uns zunächst einige Beispiele an und legen anschließend den allgemeinen Rahmen fest, in dem wir gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten wollen.

Beispiel 1: Exponentielles Wachstum Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit t die Größe $y(t)$. Nach Ablauf der Zeit Δt hat sie sich um $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ vermehrt. Eine vernünftige Annahme ist, dass Δy für kleine Zeitspannen proportional zum Ausgangszustand $y(t)$ und zur Zeitspanne Δt ist:

$$\Delta y = ay(t)\Delta t \quad \text{mit } a > 0.$$

Nehmen wir an, dass y differenzierbar von t abhängt, so liefert der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ in der Differenzengleichung $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ay(t)$ die Differentialgleichung $y'(t) = ay(t)$. Diese Gleichung beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur. Die positiven Lösungen dieser Gleichung kann man wie folgt finden (einen systematischen Zugang zur Lösung derartiger Gleichungen verschaffen wir uns später). Wir schreiben $\frac{y'(t)}{y(t)} = a$ als

$$\frac{y'}{y} = a \quad \text{bzw.} \quad (\ln y)' = a \quad \text{bzw.} \quad z' = a$$

mit $z(t) = \ln y(t)$. Die Lösungen der Gleichung $z' = a$ können wir sofort angeben:

$$z(t) = at + b \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt

$$y(t) = e^{z(t)} = e^{at+b} = Ce^{at}$$

mit einer Konstanten $C = e^b > 0$. Wir finden also eine ganze Schar von Funktionen, die die Gleichung $y' = ay$ lösen. Kennt man $y_0 = y(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0, so kann man aus $y_0 = Ce^{at_0}$ die Konstante $C = e^{-at_0}y_0$ bestimmen und erhält die Lösung

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Die Kenntnis eines *Anfangswertes* $y_0 = y(t_0)$ macht also aus der unendlichen Lösungsschar eine eindeutig bestimmte Lösung. ∎

Beispiel 2: Logistisches Wachstum Das exponentielle Wachstumsmodell ist nur begrenzt realistisch. Wird eine Population sehr groß, so treten oft wachstumshemmende Faktoren auf wie endliche Ressourcen. Kann etwa die Population eine Maximalgröße K nicht überschreiten, so ist es nahe liegend anzunehmen, dass die Zuwachsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ proportional zur Größe $y(t)$ und auch zum „verbleibenden Spielraum" $K - y(t)$ ist. Das führt auf die Differentialgleichung

$$y'(t) = by(t)\big(K - y(t)\big) = ay(t) - by(t)^2$$

mit $a = bK$. Die Gleichung $y' = ay - by^2$ beschreibt das *logistische Wachstum*. Es handelt sich um eine spezielle *Bernoullische Differentialgleichung*, die wir später ausführlicher betrachten. Im Fall $0 < y < K$ können wir uns ihre Lösung wie folgt verschaffen. Wir betrachten die Funktion $z := \frac{K-y}{y} = \frac{K}{y} - 1$. Für diese ist $z' = -\frac{Ky'}{y^2}$. Es ist daher y genau dann eine Lösung von $y' = by(K - y)$, wenn

$$z' = -\frac{K}{y^2}y' = -\frac{K}{y^2}by(K - y) = -bK\frac{K - y}{y} = -bKz = -az.$$

Die Funktion z genügt also der Differentialgleichung für exponentielles Wachstum. Mit $z_0 = z(0)$ erhalten wir wie in Beispiel 1 die eindeutige Lösung

$$z(t) = z_0 e^{-bKt},$$

und ist $y_0 = y(0) \neq 0$, so ist $z_0 = \frac{K}{y_0} - 1$, und wir erhalten mit $y = \frac{K}{z+1}$

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-bKt}}\,. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 3: Bewegung im Schwerefeld der Erde Ein Körper der Masse m befinde sich im Schwerefeld der Erde (Masse M). Sein Abstand zum Erdmittelpunkt sei gleich s. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt für die Anziehungskraft zwischen diesen Massen

$$K = \gamma\,\frac{Mm}{s^2} \quad (\gamma\text{-Gravitationskonstante}).$$

Nun beobachten wir eine Bewegung dieses Massepunktes. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei sein Abstand vom Erdmittelpunkt gleich s_0, und der Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0. Für $v_0 > 0$ bewegt er sich weg vom Erdmittelpunkt, und für $v_0 < 0$ auf den Erdmittelpunkt zu. Nach t Zeiteinheiten habe er den Abstand $s(t)$ vom Erdmittelpunkt. Aus dem Newtonschen Kraftgesetz folgt die Differentialgleichung

$$m\ddot{s}(t) = -\gamma\,\frac{Mm}{s(t)^2}\,.$$

Wir lösen diese Gleichung später. Dabei werden wir feststellen, dass diese Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt, dass es aber nur eine Lösung gibt, die die *Anfangsbedingungen*

$$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = v_0$$

erfüllt. $\blacksquare$

Definition 18.1 *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : G \to \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \tag{18.1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt eine* Lösung *von* (18.1)*, wenn sie auf I n mal differenzierbar ist und wenn für alle $x \in I$ gilt*

$$\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \in G$$

und

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big).$$

Man betrachtet auch so genannte *implizite* Differentialgleichungen der Gestalt

$$F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Diese sind im Allgemeinen wesentlich schwieriger zu behandeln als die *expliziten* Differentialgleichungen (18.1), die nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist. Wir werden uns ausschließlich mit expliziten Differentialgleichungen befassen.

Die Beispiele 1-3 ordnen sich in diesen Rahmen wie folgt ein. Für das exponentielle Wachstum ist

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = ay,$$

und für das logistische Wachstum

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = by(K - y).$$

In Beispiel 3 könnte man

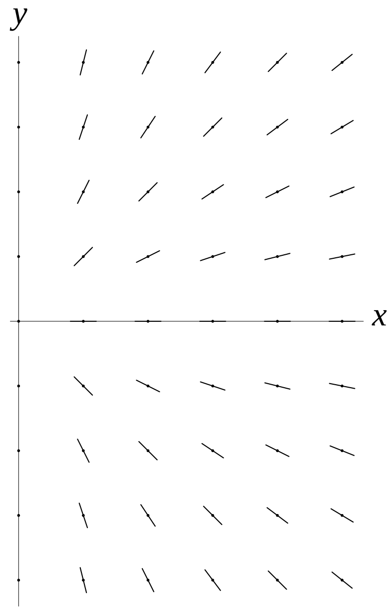
$$G = [0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(t, s, \dot{s}) = -\gamma \frac{M}{s^2}$$

wählen. ■

Über die Lösungsschar einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ erster Ordnung kann man sich einen ungefähren geometrischen Überblick verschaffen, indem man das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung zeichnet. Jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ wird ja durch die Differentialgleichung eine Steigung $f(x_0, y_0)$ zugeordnet. Diese beschreibt die Steigung der Tangente an jede Lösungskurve durch (x_0, y_0). Zeichnet man in genügend viele Punkte von G kleine Striche (Linienelemente) mit den jeweiligen Steigungen, so erhält man das Richtungsfeld und damit ein ungefähres Bild vom Verlauf der Lösungskurven. Für

$$G = (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{y}{x}$$

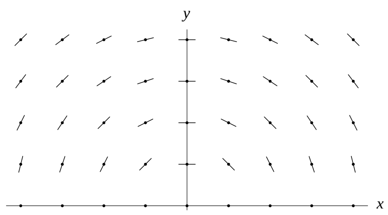
erhält man beispielsweise das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$:



Das Bild legt nahe, dass Geraden durch den Nullpunkt, also Funktionen der Gestalt $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung lösen. Tatsächlich ist

$$y'(x) = a = \frac{y(x)}{x} = f\big(x, y(x)\big) \quad \text{für alle } x > 0.$$

Für $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ erhält man die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ mit dem Richtungsfeld



Tatsächlich sind Lösungen von $y' = -\frac{x}{y}$ durch die „Halbkreiskurven“

$$y : (-c, c) \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad c > 0$$

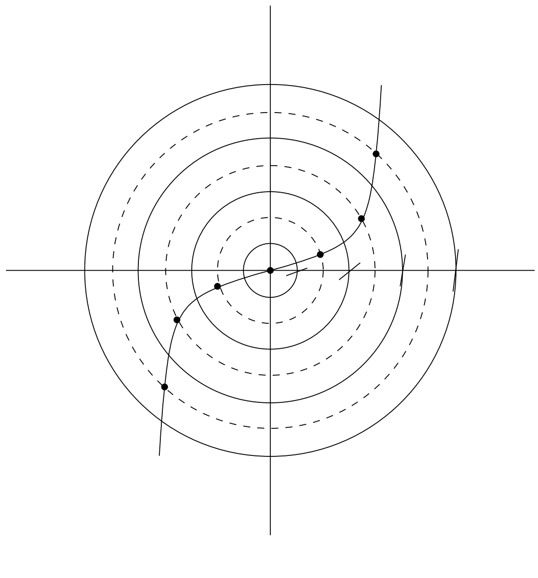
gegeben:

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{c - x^2}} = -\frac{x}{y(x)} = f\big(x, y(x)\big). \qquad \blacksquare$$

Hilfreich bei der näherungsweisen Konstruktion von Lösungen sind auch die *Isoklinen* der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Das sind die Höhenlinien der Funktion f, d.h. die durch die Gleichungen

$$f(x, y) = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

gegebenen Kurven in $\mathbb{R}^2$. Für $y' = f(x, y) = x^2 + y^2$ erhält man beispielsweise konzentrische Kreise um den Nullpunkt als Isoklinen.



Zeichnet man eine genügend große Anzahl von Isoklinen und skizziert zwischen diesen noch die Mittellinien, so kann man die Lösungskurven der Differentialgleichung angenähert durch Polygonzüge mit Ecken auf den Mittellinien darstellen.

18.2 Elementare Lösungsmethoden

Wir betrachten nun einige spezielle Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungen auf elementarem Weg bestimmt werden können.

18.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad (x, y) \in G := I \times J \tag{18.2}$$

eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Satz 18.2 *Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Wir definieren Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt.$$

Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $y : I' \to \mathbb{R}$ der Gleichung (18.2) *mit $y(x_0) = y_0$. Diese Lösung erfüllt die Gleichung*

$$H\big(y(x)\big) = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'. \tag{18.3}$$

Formal kann man wie folgt vorgehen: Man schreibt (18.2) als $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, trennt die Veränderlichen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ und integriert

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Sind $H(y)$ und $F(x)$ Stammfunktionen von $\frac{1}{g(y)}$ und $f(x)$, so erhalten wir die Lösung von (18.2) in impliziter Form $H(y) = F(x) + c$. Diese Gleichung (bzw. die Gleichung (18.3)) versucht man noch nach y umzustellen, um die Lösung in expliziter Form zu erhalten. Satz 18.2 gibt diesem formalen Vorgehen einen präzisen Sinn.

Beispiel 4 Für die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{auf} \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ist $f(x) \equiv 1$ und $g(y) = 1 + y^2$, und wir erhalten mit Satz 18.2 für die Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ die Funktionen

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0 \quad \text{und} \quad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan y - \arctan y_0.$$

Aus

$$H\big(y(x)\big) = \arctan y(x) - \arctan y_0 \stackrel{!}{=} x - x_0 = F(x)$$

folgt mit $c := \arctan y_0$ die Lösung

$$y(x) = \tan(x - x_0 + c).$$

Man sieht, dass sich die Lösung y mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nicht über das offene Intervall $\big(-\frac{\pi}{2} + x_0 - c, \frac{\pi}{2} + x_0 - c\big)$ hinaus fortsetzen läßt (obwohl f und g auf ganz $\mathbb{R}$ definiert waren). ■

Beispiel 5 Wir suchen eine Lösung y der Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = c. \tag{18.4}$$

Für $c = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Sei $c > 0$. Dann ist $J = (0, \infty)$ ein geeignetes Intervall mit $g(y) = y^2 \neq 0$ für alle $y \in J$. Wir benutzen also Satz 18.2 mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto y^2$$

und erhalten

$$F(x) = \int_0^x dt = x \quad \text{sowie} \quad H(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}.$$

Aus

$$H\big(y(x)\big) = \frac{1}{c} - \frac{1}{y(x)} \stackrel{!}{=} x = F(x)$$

folgt durch Umstellen

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx}.$$

Das ist eine Lösung von (18.4) auf $(-\infty, \frac{1}{c})$ im Fall $c > 0$. Analog ergibt sich für $c < 0$ die Lösung $y(x) = \frac{c}{1-cx}$ auf $\big(\frac{1}{c}, \infty\big)$. ■

18.2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)\, y + b(x) \tag{18.5}$$

eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Das Wort *linear* lässt sich so verstehen: Erklärt man einen Operator A auf dem linearen Raum der differenzierbaren Funktionen auf I durch $Ay := y' - ay$, so kann man (18.5) schreiben als $Ay = b$, und der Operator A ist *linear*, d.h. für differenzierbare Funktionen y_1 und y_2 und reelle Zahlen c_1, c_2 gilt

$$\begin{aligned} A(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)' - a(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1' - ay_1) + c_2(y_2' - ay_2) = c_1Ay_1 + c_2Ay_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (18.5) heißt *homogen*, wenn b die Nullfunktion ist, und sonst *inhomogen*. Wir beschäftigen uns zuerst mit der homogenen Gleichung

$$y' = a(x)y\,. \tag{18.6}$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

Satz 18.3 *Seien $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$, und sei a stetig auf I. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung* (18.6) *mit $y(x_0) = c$, und zwar*

$$y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right). \tag{18.7}$$

Dass (18.7) eine Lösung ist, sieht man sofort durch Einsetzen:

$$y'(x) = c \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big) \cdot a(x) = a(x)y(x).$$

Wir lernen später einen Satz kennen, der uns die Eindeutigkeit garantiert.

Beispiel 6 Die Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = 2kxy$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Anfangsbedingung $y(x_0) = c$ haben die Gestalt

$$y(x) = c \exp\Big(\int_{x_0}^{x} 2kt\,dt\Big) = ce^{k(x^2 - x_0^2)}. \qquad \blacksquare$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der inhomogenen Gleichung (18.5) bietet die Methode der *Variation der Konstanten*. Wir wissen, dass die Lösung der zur Gleichung $y' = ay + b$ gehörenden homogenen Gleichung $y' = ay$ gegeben ist durch

$$y(x) = ce^{P(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

Wir suchen eine Lösung y der inhomogenen Gleichung $y' = ay + b$ in der Form

$$y(x) = c(x)\,e^{P(x)}, \tag{18.8}$$

d.h. wir haben die Konstante c zu einer Funktion $x \mapsto c(x)$ gemacht (wir haben die Konstante variiert). Geht man mit dem Ansatz (18.8) in die inhomogene Gleichung, so erhält man eine Gleichung für $c'(x)$, aus der man $c(x)$ durch Integration bestimmen kann.

Satz 18.4 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung y der Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit $y(x_0) = c$, nämlich*

$$y(x) = e^{P(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-P(t)} dt \right) \text{ mit } P(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt. \tag{18.9}$$

Beispiel 7 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3 \quad \text{auf } G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Es ist also $a(x) = 2x$ und $b(x) = x^3$. Die homogene Gleichung $y' = 2xy$ hat die Lösungen

$$y(x) = c \exp\left(\int_0^x 2t\, dt \right) = c\, e^{x^2} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Nach Satz 18.4 ist die Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = c$ gleich

$$y(x) = e^{x^2} \big(c + \int_0^x t^3 e^{-t^2} dt \big).$$

Das vorkommende Integral berechnet man mit der Substitution $s = t^2$ und mit anschließender partieller Integration. Die Lösung der Ausgangsgleichung ist dann

$$y(x) = c\, e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Wir sehen uns noch den Rechnungsablauf an, wenn man in $y(x) = c\, e^{x^2}$ die Konstante c variiert (und nicht auf die Lösungsdarstellung (18.9) zurückgreift). Wir setzen $y(x) = c(x)e^{x^2}$ in die Ausgangsgleichung ein:

$$y'(x) = c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2} \stackrel{!}{=} 2x\, c(x)e^{x^2} + x^3 = 2xy + x^3.$$

Hieraus folgt

$$c'(x) = x^3 e^{-x^2}$$

(man beachte, dass die Funktion c selbst nicht mehr explizit auftritt), und die Integration von $c'(x)$ führt genau auf das oben bestimmte Integral. ■

Wir schreiben die Lösung (18.9) in der Form

$$y(x) = c\, e^{P(x)} + e^{P(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-P(t)} dt. \tag{18.10}$$

Der erste Summand $y_h(x) := ce^{P(x)}$ beschreibt die *allgemeine Lösung der homogenen Gleichung* $y' = ay$, während der zweite Summand in (18.10) $y_0(x) := e^{P(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-P(t)}dt$ eine *spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung* $y' = ay + b$ ist (die man für $c = 0$ aus (18.10) erhält). Die *allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung* ist also gleich $y(x) = y_0(x) + y_h(x)$.

Satz 18.5 *Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' = ay + b$ hat die Form*

$$y'(x) = y_0(x) + y_h(x),$$

wobei y_0 eine (beliebige) spezielle Lösung der Gleichung $y' = ay + b$ und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y' = ay$ ist.

Vergleichen Sie dieses Resultat mit Ihnen bekannten Aussagen über die Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme! Satz 18.5 gilt analog für alle linearen Differentialgleichungen.

18.2.3 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y'(x) = f\big(\frac{y}{x}\big) \quad \text{auf} \quad G := \{(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} : \frac{y}{x} \in I\} \tag{18.11}$$

eine *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*. Wir führen eine neue Funktion $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ ein. Dann ist $y(x) = xz(x)$ und $y'(x) = xz'(x)+z(x)$, und wir erhalten aus (18.11) $xz'(x) + z(x) = f(z)$ bzw.

$$xz' = f(z) - z. \tag{18.12}$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Falls $f(z) \neq z$ für alle z aus einem geeigneten Intervall ist, kann man (18.12) wie in Abschnitt 18.2.1 lösen. Aus der Lösung z von (18.12) erhält man schließlich die Lösung $y(x) = xz(x)$ von (18.11).

Beispiel 8 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \big(\frac{y}{x}\big)^2 \quad \text{auf} \quad G := (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Durch die Substitution $z = y/x$ geht sie über in die Gleichung

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)$$

mit getrennten Veränderlichen. Hier ist $f(z) - z = 1 + z^2 \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0 = y_0/x_0$ ist nach (18.3) gegeben durch

$$\arctan z - \arctan z_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{1 + t^2} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t} = \ln\big(\frac{x}{x_0}\big),$$

d.h. es ist

$$z(x) = \tan\big(c + \ln(\frac{x}{x_0})\big) \quad \text{mit} \quad c := \arctan z_0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wird also gelöst durch

$$y(x) = x \tan\bigl(c + \ln(\frac{x}{x_0})\bigr).$$

Variablensubstitutionen wie $z = y/x$ lassen sich oft bei der Lösung von Differentialgleichungen einsetzen.

18.2.4 Bernoullische Differentialgleichungen

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \quad \text{auf } I \times (0, \infty) \tag{18.13}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ eine *Bernoullische Differentialgleichung*. Die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ schließen wir aus, da dann (18.13) eine lineare Differentialgleichung wäre, die wir bereits gelöst haben. Die Substitution $z(x) := y(x)^{1-\alpha}$ überführt (18.13) in eine lineare Differentialgleichung. Aus $z = y^{1-\alpha}$ und $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ folgt nämlich

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} z' = a z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = ay + by^\alpha$$

bzw.

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x).$$

Diese Gleichung löst man wie in Abschnitt 18.2.2, und aus der Lösung z erhält man die Lösung $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ der Bernoulli-Gleichung (18.13).

Beispiel 9 Für die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{x}\,y + x^2y^2$ ist $\alpha = 2$, $a(x) = -\frac{1}{x}$ und $b(x) = x^2$. Die Substitution $z = y^{-1}$ führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}\,z - x^2$$

mit der allgemeinen Lösung

$$z(x) = \frac{x}{2}\,(c - x^2), \quad c \in \mathbb{R},$$

nach Satz 18.4. Die Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \frac{2}{x(c-x^2)}\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$ ■

Auf eine Bernoulli-Gleichung kann z.B. die Lösung der *Riccati-Gleichung*

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

zurückgeführt werden, sofern man eine spezielle Lösung dieser Gleichung kennt (vgl. Arbeitsbuch II, Satz 2.4).

18.2.5 Exakte Differentialgleichungen

Ist die differenzierbare Funktion y implizit durch eine Gleichung $u\big(x, y(x)\big) = c$ gegeben, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\, u\big(x, y(x)\big) = u_x\big(x, y(x)\big) \cdot 1 + u_y\big(x, y(x)\big) \cdot y'(x) = 0.$$

Die Funktion y erfüllt also die Differentialgleichung

$$u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = 0.$$

Definition 18.6 *Sei R ein offenes und achsenparalleles Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Eine Differentialgleichung der Form*

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad (x, y) \in R, \tag{18.14}$$

mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f, g : R \to \mathbb{R}$ heißt exakt*, wenn es eine partiell differenzierbare Funktion $u : R \to \mathbb{R}$ gibt mit*

$$u_x(x, y) = f(x, y) \quad \textit{und} \quad u_y(x, y) = g(x, y) \quad \textit{für alle } (x, y) \in R.$$

Ist die Gleichung (18.14) exakt, so genügen ihre Lösungen y einer Gleichung $u(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, die man unter Umständen nach y umstellen kann. Zur Lösung von Gleichungen wie (18.14) benötigt man also ein möglichst einfaches Kriterium zur Überprüfung der Exaktheit und eine Methode zur Berechnung der Funktion u. Beides kennen wir aus Kapitel 14, denn die in Definition 18.6 formulierten Bedingungen bedeuten nichts anderes, als dass u ein Potential für das Vektorfeld $(x, y) \mapsto \big(f(x, y), g(x, y)\big)^T$ ist.

Satz 18.7 *Die Differentialgleichung* (18.14) *ist genau dann exakt auf R, wenn die Integrabilitätsbedingung*

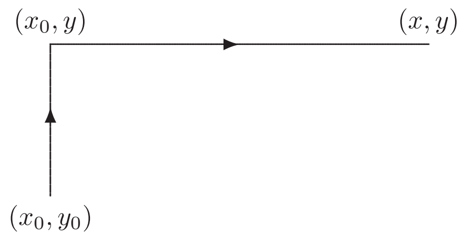
$$f_y(x, y) = g_x(x, y) \quad \textit{für alle } (x, y) \in R \tag{18.15}$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist die Lösung y von (18.14) *mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ (wobei $(x_0, y_0) \in R$) implizit durch die Gleichung $u(x, y) = 0$ mit*

$$u(x, y) := \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)d\xi + \int_{y_0}^{y} g(x_0, \eta)d\eta \tag{18.16}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (18.15) *wird durch die Gleichungen $u(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, beschrieben.*

In (18.16) haben wir über einen speziellen Weg von (x_0, y_0) nach (x, y) integriert:



Man kann u auch wie in Kapitel 14 bestimmen, indem man $u_x = f$ nach x integriert und das Ergebnis nach y ableitet und gleich g setzt. Die Gleichung (18.14) wird oft auch in der symmetrischen Form

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

geschrieben.

Beispiel 10 Die Differentialgleichung

$$x + y^2 + (2xy - 1)y' = 0$$

ist von der Form (18.14) mit $f(x,y) = x + y^2$ und $g(x,y) = 2xy - 1$. Wegen

$$f_y(x,y) = 2y \quad \text{und} \quad g_x(x,y) = 2y$$

ist diese Gleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ exakt. Zur Berechnung von u verwenden wir Formel (18.16) mit $x_0 = y_0 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x (\xi + y^2)d\xi + \int_0^y (-1)d\eta \\ &= \frac{\xi^2}{2} + y^2\xi\Big|_0^x - \eta\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy^2 - y. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung y der Ausgangsgleichung in impliziter Form

$$\frac{x^2}{2} + xy^2 - y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

■

Ist die Gleichung (18.14) nicht exakt, so gelingt es mitunter, durch Multiplikation der Gleichung mit einer geeigneten Funktion $\mu : R \to \mathbb{R}$ eine exakte Differentialgleichung zu gewinnen. Die zu befriedigende Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu f) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu g)$$

liefert eine partielle Differentialgleichung für μ:

$$g\mu_x - f\mu_y = (f_y - g_x)\mu. \tag{18.17}$$

Wir benötigen jedoch nicht alle Lösungen dieser Gleichung, sondern nur eine einzige mit $\mu(x, y) \neq 0$ auf R. Einen solchen *integrierenden Faktor* μ zu finden ist oft nicht so schwierig wie die komplette Lösung von (18.17).

Beispiel 11 Die Differentialgleichung in symmetrischer Form

$$xy^3 dx + (1 + 2x^2y^2)dy = 0$$

ist wegen

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}(xy^3) = 3xy^2 \quad \text{und} \quad g_x(x, y) = \frac{d}{dx}(1 + 2x^2y^2) = 4xy^2$$

nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor μ. Die partielle Differentialgleichung (18.17) lautet in diesem Fall

$$(1 + 2x^2y^2)\mu_x - xy^3\mu_y = -xy^2\mu.$$

Wir versuchen, eine *nur von y abhängende* Funktion μ zu finden, die diese Gleichung erfüllt. Wegen $\mu_x = 0$ ist dann

$$-xy^3\mu_y = -xy^2\mu \quad \text{bzw.} \quad y\mu_y = \mu \quad \text{auf } (0, \infty).$$

Diese lineare Gleichung hat als eine Lösung die Funktion $\mu(y) = y$. Das ist der gesuchte integrierende Faktor. Die Differentialgleichung

$$xy^4 dx + (y + 2x^2y^3)dy = 0$$

ist exakt und kann wie im Beispiel 10 gelöst werden. Ihre Lösungen sind in impliziter Form gegeben durch

$$(x^2y^2 + 1)y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$ ■

18.2.6 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

In der Physik tritt die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ auf als eindimensionale Bewegungsgleichung eines Punktes, der einer nur vom Ort abhängigen Kraft ausgesetzt ist (vgl. Beispiel 3). Wir schreiben daher (t, x) statt (x, y) und $\dot{x}$ statt y' und betrachten für ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f(x) \quad \text{auf } \mathbb{R} \times I. \tag{18.18}$$

Wir definieren eine Funktion $U : I \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) := -\int_a^x f(t)dt$$

mit einem beliebig gewählten $a \in I$. Die Funktion U hat die physikalische Bedeutung einer potentiellen Energie. Die Gleichung (18.18) geht dann über in

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x).$$

Die Gesamtenergie des Massepunktes zum Zeitpunkt t wird gegeben durch

$$E(t) := \frac{1}{2}\,\dot{x}(t)^2 + U\big(x(t)\big). \tag{18.19}$$

Für die Ableitung dieser Funktion ergibt sich

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\,\dot{x}(t) = \dot{x}(t)\left(\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\right) = 0.$$

Also ist E eine konstante Funktion (Energieerhaltungssatz), und wir können E als reelle Zahl betrachten. Wegen (18.19) genügt die Bewegung dann der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t)^2 = 2(E - U(x(t))).$$

Ist $\dot{x}(t) \geq 0$, so folgt hieraus

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))},$$

und für $\dot{x}(t) \leq 0$ hat man

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2(E - U(x(t)))}.$$

Dies sind aber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Nach diesen Überlegungen kann man Beispiel 3 versuchen zu lösen. Details finden Sie in Arbeitsbuch II, S. 34–35.

18.2.7 Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$

In diesen Gleichungen tritt die unabhängige Veränderliche x nicht direkt auf. Hier kommt man unter Umständen zum Ziel, wenn man nicht y in Abhängigkeit von x sondern x in Abhängigkeit von y sucht (Variablentausch). Die Umkehrfunktion existiert, wenn y stetig differenzierbar mit einer von Null verschiedenen Ableitung ist. Gilt in den Anfangsbedingungen $y(x_0) = \alpha_0$ und $y'(x_0) = \alpha_1$ etwa $\alpha_1 \neq 0$, so ist dies in einer Umgebung von x_0 gewährleistet, und es ist dort (vgl. Satz 4.5)

$$x'(y) = \frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy(x)}{dx}} = \frac{1}{y'\big(x(y)\big)}\,.$$

Für die zweite Ableitung erhält man mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} x''(y) &= \frac{d}{dy}\big(x'(y)\big) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'\big(x(y)\big)}\right) = -\frac{1}{y'(x)^2}\,\frac{d}{dy}\big(y'\big(x(y)\big)\big) \\ &= -\frac{1}{y'(x)^2}\,y''(x)\cdot\frac{1}{y'(x)} = -x'(y)^3\,y''(x). \end{aligned}$$

Ist y also eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = f(y, y') \quad \text{mit} \quad y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,$$

so ist die Umkehrfunktion $x = x(y)$ eine Lösung von

$$x'' = -(x')^3 f\big(y, \frac{1}{x'}\big), \quad x(\alpha_0) = x_0, \quad x'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_1}\,. \tag{18.20}$$

Wir sehen, dass die Funktion $x = x(y)$ nicht direkt auftritt, sondern nur ihre Ableitungen x' und x''. Die Gleichung (18.20) ist also von der Gestalt

$$x'' = g(t, x'), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1\,, \tag{18.21}$$

wobei wir die unabhängige Variable mit t bezeichnet haben. Durch die Substitution $x' = z$ geht (18.21) über in die Gleichung erster Ordnung

$$z' = g(t, z) \quad \text{mit} \quad z(t_0) = x_1,$$

die man versucht, mit den Methoden aus 18.2.1 – 18.2.5 zu lösen. Aus der Lösung erhält man die Lösung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} z(t)dt$$

von (18.21).

Beispiel 12 Das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}\,, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

geht durch Variablentausch in das transformierte Problem

$$x'' = -(x')^3 \Big(-\frac{1}{(x')^2} \cdot \frac{1}{y}\Big) = \frac{x'}{y}\,, \quad x(3) = 0, \quad x'(3) = 1$$

über.

Mit $x' = z$ erhalten wir das Anfangswertproblem erster Ordnung

$$z' = \frac{z}{y} \quad \text{mit} \quad z(3) = 1$$

für z. Seine Lösung $z(y) = y/3$ findet man z.B. durch Trennung der Veränderlichen. Wegen $x(3) = 0$ ist

$$x(y) = 0 + \int_3^y \frac{t}{3}\,dt = \frac{y^2 - 9}{6}\,.$$

In einer Umgebung von 0 ist y positiv. Daher ist

$$y(x) = \sqrt{6x + 9}$$

die Lösung des Ausgangsproblems. Diese Funktion ist für $x \geq -3/2$ definiert und streng monoton wachsend. ∎

18.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Frage nach der Existenz und der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung des expliziten Anfangswertproblems erster Ordnung

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0. \tag{18.22}$$

Für $b > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

das achsenparallele Rechteck mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und den Seitenlängen $2a$ und $2b$. Weiter sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir setzen

$$M := \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| \quad \text{und} \quad \varepsilon := \begin{cases} \min\{a, \frac{b}{M}\}, & \text{falls } M > 0, \\ a & \text{falls } M = 0. \end{cases}$$

Das Maximum existiert, da die Funktion $|f|$ auf der beschränkten und abgeschlossenen Menge R stetig ist.

Satz 18.8 (Existenzsatz von Peano) *Ist f stetig auf R, so besitzt das Anfangswertproblem* (18.22) mindestens eine *Lösung y auf dem Intervall* $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Lösungen gibt es also bereits unter recht schwachen Voraussetzungen an f. Sie sind jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 13 Sei $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann sind $y(x) \equiv 0$ und $y(x) = x^3$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, die beide die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erfüllen. Darüber hinaus ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch $y_c(x) := (x-c)^3$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$, und man kann aus diesen Lösungen weitere Lösungen „zusammensetzen“. So sind für $c < d$ auch die Funktionen

$$y_{c,d}(x) := \begin{cases} (x - c)^3 & \text{für } x \leq c \\ 0 & \text{für } c < x \leq d \\ (x - d)^3 & \text{für } d < x \end{cases}$$

Lösungen von $y' = f(x, y)$, und diese erfüllen für $c \leq 0 \leq d$ ebenfalls die Anfangsbedingung $y(0) = 0$. ■

Eine Bedingung an f, die die Eindeutigkeit der Lösung erzwingt, wird in der folgenden Definition beschrieben.

Definition 18.9 *Die Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Rechteck R* Lipschitz-stetig bzgl. y, *wenn es eine Konstante L gibt mit*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \textit{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in R. \tag{18.23}$$

Diese Ungleichung heißt Lipschitzbedingung *für f auf R, und L heißt eine* Lipschitz-Konstante *für f auf R.*

Der folgende Satz erleichtert in vielen Fällen das Überprüfen der Lipschitzbedingung.

Satz 18.10 *Die Funktion f besitze auf R eine stetige partielle Ableitung nach y. Dann ist f auf R Lipschitz-stetig bzgl. y, und eine Lipschitzkonstante ist durch*

$$L := \max_{(x,y)\in R} |f_y(x,y)|$$

gegeben.

Dies ist eine einfache Konsequenz des Mittelwertsatzes, nach dem es ein η im Intervall (y_1, y_2) mit

$$\frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} = f_y(x,\eta)$$

gibt. Folglich ist

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq |f_y(x,\eta)|\,|y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 14 Die Funktion $f(x,y) = x^3 \sin y$ erfüllt auf jedem Rechteck R eine Lipschitzbedingung nach Satz 18.10. Auch die Funktion $f(x,y) = |y|$ erfüllt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big|\,|y_1| - |y_2|\,\big| \leq |y_1 - y_2|$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ eine Lipschitzbedingung mit $L = 1$, obwohl sie für $y = 0$ nicht partiell nach y differenzierbar ist. Dagegen ist die Funktion $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ aus Beispiel 13 auf keiner Umgebung von $(0,0)$ Lipschitz-stetig bzgl. y, denn

$$y \mapsto \frac{|f(0,y) - f(0,0)|}{|y - 0|} = \left|\frac{y^{2/3}}{y}\right| = |y^{-1/3}|$$

ist auf jeder Umgebung von 0 unbeschränkt. $\blacksquare$

Satz 18.11 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) *Seien a, b, x_0, y_0 und R sowie f, M und ε wie oben. Die Funktion f sei auf G stetig und genüge auf G außerdem einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L. Dann gilt:*

a) *auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ existiert eine Lösung der Anfangswertaufgabe* (18.22)*, und diese ist eindeutig bestimmt.*

b) *Diese Lösung kann iterativ mit dem folgenden Verfahren gewonnen werden: Man startet mit einer auf* $J := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ *stetigen Funktion* u_0 *mit*

$$|u_0(x) - y_0| \leq b \quad \textit{für alle } x \in J$$

(z.B. kann man die konstante Funktion $u_0(x) = y_0$ *wählen) und berechnet für* $n = 1, 2, \ldots$ *nacheinander die Funktionen*

$$u_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u_{n-1}(t)\big)dt, \quad x \in J. \tag{18.24}$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge (u_n) *gleichmäßig auf* J *gegen die Lösung* y *von* (18.22).

c) *Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\max_{t \in J} |u_n(t) - y(t)| \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} e^{\varepsilon L} \cdot \max_{t \in J} |u_0(t) - u_1(t)|. \tag{18.25}$$

Dieser Satz ist außerordentlich nützlich. Er liefert nicht nur ein einfaches Kriterium für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf einem (leicht berechenbaren) Intervall, sondern darüber hinaus eine effektive Methode der näherungsweisen Berechnung der Lösung. Die Iterationsvorschrift (18.24) kann man sich so erklären. Ist y eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so erhält man durch Integration

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$$

und wegen

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(t)\big|_{x_0}^{x} = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt. \tag{18.26}$$

Jede Lösung von (18.22) löst also auch die Integralgleichung (18.26). Ist umgekehrt y eine stetige Lösung von (18.26), so ist y automatisch differenzierbar (warum?). Man kann (18.26) also differenzieren und stellt fest, dass y auch das Anfangswertproblem (18.22) löst. In diesem Sinn sind (18.22) und (18.26) zueinander äquivalent. Der Vorteil der Beschreibung (18.26) liegt im folgendem. Man fasst die rechte Seite von (18.26) als eine Vorschrift (einen Operator) A auf, der der Funktion y die Funktion Ay mit

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$$

zuordnet. Gleichung (18.26) kann damit geschrieben werden als $Ay = y$, d.h. man sucht eine Funktion, die durch A auf sich selbst abgebildet wird oder die ein *Fixpunkt* von A ist. Es gibt eine Reihe von Sätzen, die Aussagen über die Existenz von Fixpunkten machen. Einer dieser Sätze, der *Banachsche Fixpunktsatz*, liefert bei Anwendung auf (18.26) genau den Satz 18.11.

Beispiel 15 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 2xy$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Auf $R = [-1, 1] \times [0, 2]$ ist die Funktion $f(x, y) := 2xy$ stetig, es ist

$$M = \max_{(x,y)\in R} |2xy| = 2 \max_{x\in[-1,1]} |x| \max_{y\in[0,2]} |y| = 4,$$

und die Funktion f erfüllt auf $\mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2xy_1 - 2xy_2| \leq 2|x|\,|y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$$

mit der Lipschitzkonstanten $L = 2$. Wir erhalten

$$\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{4}\,.$$

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert, dass das betrachtete Anfangswertproblem auf $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Wir benutzen die *Picard-Iteration* aus Satz 18.11(b), um diese Lösung näherungsweise zu berechnen. Als Startfunktion wählen wir die konstante Funktion $y_0(x) = y_0 = 1$. Dann berechnen wir y_1 aus $y_1 = Ay_0$, d.h. aus

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2t \cdot 1dt = 1 + x^2.$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x 2t\,y_1(t)dt = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2)dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4, \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x 2t\,y_2(t)dt = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4)dt \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \end{aligned}$$

und allgemein

$$y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \ldots + \frac{1}{n!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^{2k}.$$

Diese Funktionen konvergieren auf $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ gleichmäßig gegen die Lösung y des Anfangswertproblems, und mit Satz (18.10)(c) können wir abschätzen, wie nahe y_n bei der wahren Lösung liegt. Dazu berechnen wir

$$\max_{x\in[-1/4,1/4]} |y_0(x) - y_1(x)| = \max_{x\in[-1/4,1/4]} |x^2| = 1/16$$

und erhalten aus (18.25)

$$\max_{x\in[-1/4,1/4]} |y_n(x) - y(x)| \le \frac{(\frac{1}{4}\cdot 2)^n}{n!}\, e^{\frac{1}{4}\cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{e}}{2^{n+4} n!} \le \frac{1}{2^{n+3} n!}\,.$$

Für $n = 3$ ist also bereits

$$\max_{x\in[-1/4,1/4]} |y_3(x) - y(x)| \le \frac{1}{2^6 \cdot 3!} = \frac{1}{384} \approx 0.0027,$$

d.h. der Graph von y liegt in einem Schlauch der Breite 0.0027 um den Graphen von y_3. Man sieht insbesondere, dass die Folge (y_n) sehr schnell gegen y konvergiert.

In diesem konkreten Fall kann man die Lösung y leicht aus den Näherungsfunktionen bestimmen:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x^2)^k = e^{x^2},$$

und man rechnet leicht nach, dass diese Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. ■

Beispiel 16 Analog erhält man für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

mit der Startfunktion $y_0(x) = 0$ die Näherungslösungen

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \int_0^x (t^2 + 0^2)dt = \frac{1}{3}x^3, \\
y_2(x) &= \int_0^x \left(t^2 + y_1(t)^2\right)dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right)dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7, \\
y_3(x) &= \int_0^x \left(t^2 + y_2(t)^2\right)dt = \int_0^x \left(t^2 + \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7\right)^2\right)dt \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.
\end{aligned}$$

■

18.4 Potenzreihenansätze

Mit den Potenzreihenansätzen lernen wir eine weitere Methode kennen, mit der sich Anfangswertprobleme wie

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{18.27}$$

lösen lassen, sofern sich die Funktion f in einer Umgebung von (x_0, y_0) in eine konvergente Potenzreihe bzgl. x und y entwickeln läßt. In diesem Fall läßt sich auch die Lösung y von (18.27) in einer Umgebung von x_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

entwickeln, deren Koeffizienten sukzessive aus der Anfangsbedingung und der Differentialgleichung bestimmt werden können. Berechnet man die Koeffizienten a_n nur bis zu einer Stelle N, so erhält man eine Näherungslösung

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n$$

von (18.27). Genaue Voraussetzungen und Resultate lassen sich am bequemsten im Komplexen angeben. Sei $D \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Die Funktion f heißt *holomorph*, wenn die komplexen Ableitungen f_z und f_w existieren und stetig sind. Dann läßt sich f auf jeder Menge

$$Z := \Big\{ (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le a, \ |w - w_0| \le b \Big\}, \tag{18.28}$$

die komplett in D liegt, in eine Potenzreihe

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (z - z_0)^i (w - w_0)^j$$

entwickeln.

Satz 18.12 (Existenz und Eindeutigkeitssatz im Komplexen) *Die Funktion f sei auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, das die Menge (18.28) enthält, holomorph, und es sei $|f(z, w)| \le M$ für $(z, w) \in Z$. Dann existiert auf der Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon = \min\{a, b/M\}$ eine holomorphe Lösung w des Anfangsproblems*

$$w' = f(z, w) \quad \textit{mit} \quad w(z_0) = w_0. \tag{18.29}$$

Sind w_1 und w_2 Lösungen von (18.29) auf einem z_0 enthaltenden Gebiet G, so ist $w_1 = w_2$ auf G.

Wir illustrieren die Anwendung dieses Satzes an einigen Beispielen.

Beispiel 17 Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \tag{18.30}$$

ist $f(z, w) = z^2 + w^2$, und diese Funktion ist holomorph auf ganz $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Wegen $x_0 = 0$ finden wir eine Lösung des Anfangswertproblems (18.30) in Form einer Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten a_n. Wegen $y(0) = 0$ muss $a_0 = 0$ sein. Die übrigen Koeffizienten bestimmen wir durch Einsetzen des Ansatzes in die Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned}
&a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (k+1)a_{k+1}x^k + \ldots \\
&\quad = x^2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_kx^k + \ldots)^2 \\
&\quad = a_0^2 + 2a_0a_1x + (1 + 2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + \ldots + \Big(\sum_{r=0}^{k} a_r a_{k-r}\Big)x^k + \ldots
\end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lrcll}
\text{bei } x^0: & a_1 & = & a_0^2 = 0, & \text{also} \quad a_1 = 0 \\
\text{bei } x^1: & 2a_2 & = & 2a_0a_1 = 0, & \text{also} \quad a_2 = 0 \\
\text{bei } x^2: & 3a_3 & = & 1 + 2a_0a_2 + a_1^2 = 1, & \text{also} \quad a_3 = 1/3 \\
\text{bei } x^3: & 4a_4 & = & 2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 0, & \text{also} \quad a_4 = 0 \\
\text{bei } x^4: & 5a_5 & = & 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 0, & \text{also} \quad a_5 = 0 \\
\text{bei } x^5: & 6a_6 & = & 2a_0a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0, & \text{also} \quad a_6 = 0 \\
\text{bei } x^6: & 7a_7 & = & 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 = \frac{1}{9}, & \text{also} \quad a_7 = 1/63.
\end{array}$$

Der Anfang der gesuchten Potenzreihe ist somit

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \ldots$$

(vgl. auch Beispiel 16). ■

Beispiel 18 Für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, \quad y(2) = 0$$

führt der Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \ldots$$

auf

$$\begin{aligned}
a_1 + 2a_2(x-2) + 3a_3(x-2)^2 + \ldots &= 1 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n\Big)^2 \\
&= (1 + a_0^2) + 2a_0a_1(x-2) + (2a_0a_2 + a_1^2)(x-2)^2 + \ldots .
\end{aligned}$$

Wegen $y(2) = 0$ ist $a_0 = 0$, und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{lrcll}
\text{bei } x^0: & a_1 & = & 1 + a_0^2 = 1, & \text{also} \quad a_1 = 1 \\
\text{bei } x^1: & 2a_2 & = & 2a_0a_1 = 0, & \text{also} \quad a_2 = 0 \\
\text{bei } x^2: & 3a_3 & = & 2a_0a_2 + a_1^2 = 1, & \text{also} \quad a_3 = 1/3 \\
\text{bei } x^3: & 4a_4 & = & 2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 0, & \text{also} \quad a_4 = 0 \\
\text{bei } x^4: & 5a_5 & = & 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = \frac{2}{3}, & \text{also} \quad a_5 = 2/15,
\end{array}$$

und wir erhalten den Anfang der gesuchten Potenzreihe

$$y(x) = (x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{2}{15}(x-2)^5 + \ldots .$$

Diese stimmt mit dem Anfang der Potenzreihenentwicklung für die Funktion $y(x) = \tan(x-2)$ überein. Nachrechnen zeigt, dass diese Funktion tatsächlich die Lösung des Ausgangsproblems ist. ■

Potenzreihenansätze lassen sich auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung verwenden. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \text{auf } I = (-r, r) \tag{18.31}$$

und nehmen an, dass sich p, q und f auf $(-r, r)$ durch konvergente Potenzreihen darstellen lassen:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \tag{18.32}$$

Wir suchen die Lösung y von (18.31) in Form der Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Um die a_n zu bestimmen, setzen wir diese Potenzreihen formal in (18.31) ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,
\end{aligned}$$

dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

Mit dem Cauchy-Produkt folgt weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right)x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n,$$

woraus wir schließlich durch Koeffizientenvergleich für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k} = f_n.$$

Dies ist eine Rekursionsformel zur Bestimmung der a_n. Wir wählen a_0 und a_1 beliebig oder bestimmen sie aus den Anfangsbedingungen, falls solche gegeben sind. Dann berechnen wir $a_2, a_3, a_4, ...$ nacheinander aus

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(f_n - \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\right). \tag{18.33}$$

Der folgende Satz sagt, dass dieses Vorgehen tatsächlich die Lösung von (18.31) in Form einer auf $(-r, r)$ konvergenten Potenzreihe liefert.

Satz 18.13 *Auf* $(-r, r)$ *sei die Differentialgleichung* (18.31) *gegeben und die Funktionen* p, q, f *seien auf* $(-r, r)$ *in die Potenzreihe* (18.32) *entwickelbar. Sind dann* $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ *gegeben und bestimmen wir* a_n *für* $n \geq 2$ *mittels* (18.33)*, so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *auf* $(-r, r)$ *gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung* (18.31)*, die den Anfangsbedingungen* $y(0) = a_0$ *und* $y'(0) = a_1$ *genügt.*

Sind p, q, f Polynome, so kann r beliebig groß gewählt werden, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Beispiel 19 Für $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

die *Hermitesche Differentialgleichung*. Die Rekursionsvorschrift liefert in diesem Fall

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\big(0 - (-2)na_n - \lambda a_n\big) = a_n\frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} \tag{18.34}$$

für alle $n \geq 0$. Für $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ erhalten wir die Lösung

$$y_1^{(\lambda)}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 \ldots,$$

und für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ finden wir

$$y_2^{(\lambda)}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \ldots .$$

Man kann zeigen, dass sich jede Lösung der Hermite-Gleichung als Linearkombination dieser beiden Funktionen schreiben läßt. Ist speziell $\lambda = 2n$, so folgt aus der Rekursionsformel (18.34) $a_{n+2} = 0$. Ist n gerade, so ist daher $y_1^{(2n)}$ ein Polynom, und ist n ungerade, so ist $y_2^{(2n)}$ ein Polynom. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
y_1^{(0)}(x) &= 1, \\
y_2^{(2)}(x) &= x, \\
y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2, \\
y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3, \\
y_1^{(8)}(x) &= 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass der Koeffizient vor der höchsten Potenz x^n gleich 2^n wird, so erhält man die *Hermite-Polynome*. Diese kann man als

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2}$$

schreiben. ■

Beispiel 20 Schließlich betrachten wir noch das Anfangswertproblem

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \tag{18.35}$$

Die Differentialgleichung ist eine spezielle *Besselsche Differentialgleichung*. Der Faktor x vor y'' sorgt dafür, dass man Satz 18.13 nicht unmittelbar auf (18.35) anwenden kann. Auch sonst ist Vorsicht geboten. Setzt man $x_0 = 0$ in die Differentialgleichung ein, erhält man $y'(0) = 0$, d.h. die zweite Anfangsbedingung. Man kann also die Anfangsbedingungen an der Stelle $x_0 = 0$ nicht willkürlich vorgeben.

Wir gehen wieder vom Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ aus. Die Anfangsbedingungen führen zu $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
&x(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots) \\
&\qquad + (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots) + x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = 0
\end{aligned}$$

bzw.

$$0 = a_1 + (a_0 + 4a_2)x + (a_1 + 9a_3)x^2 + \ldots + (a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1})x^k + \ldots$$

Also ist

$$a_{k+1} = -\frac{a_{k-1}}{(k+1)^2} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

und mit vollständiger Induktion erhält man

$$a_{2m+1} = 0 \quad \text{und} \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet damit

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}\, x^{2m}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. ∎