17 Integralsätze

Ziel dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$$

und der Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + u(x)v(x)\Big|_a^b$$

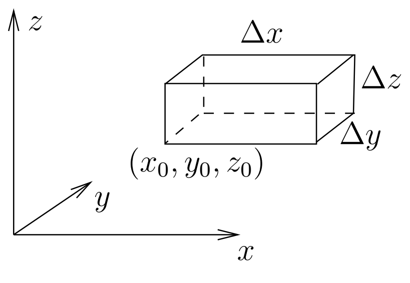
auf mehrdimensionale Integrale. Es stellt sich die Frage, durch welche Differentialoperatoren die Ableitungen f', u', v' und wodurch die Randterme $f|_a^b$ und $uv|_a^b$ zu ersetzen sind. Die gewonnenen Integralsätze finden zahlreiche Anwendungen in den Natur- und Technikwissenschaften.

17.1 Die Divergenz eines Vektorfeldes

Unser erstes Ziel ist der *Gaußsche Integralsatz* im $\mathbb{R}^3$. Seine anschauliche Bedeutung ist völlig einleuchtend:

> *Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in diesem Gebiet hervorbringen.*

Wie kann man die Flüssigkeitsmenge, die eine Quelle im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ hervorbringt, mathematisch beschreiben? Wir betrachten eine stationäre (zeitunabhängige) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit (d.h. mit konstanter Dichte), die im Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit $V(x, y, z) = \big(V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z)\big)$ hat. Im Punkt (x_0, y_0, z_0) heften wir einen kleinen achsenparallelen Quader Q mit den Seitenlängen $\Delta x, \Delta y$ und Δz an.



Dann ist das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit in Richtung der positiven x-Achse durch die linke bzw. rechte Seitenwand des Quaders fließt, näherungsweise gleich

$$V_1(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z \quad \text{bzw.} \quad V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y \Delta z.$$

Das Volumen, das pro Zeiteinheit aus dem Quader Q in der positiven x-Richtung austritt, ist also etwa gleich

$$\begin{aligned}
&\big(V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)\big)\Delta y \Delta z \\
&= \frac{V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \\
&\approx \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z.
\end{aligned}$$

Wir stellen in ähnlicher Weise die Massenbilanz für den Fluß in positiver y- und z-Richtung auf und erhalten als Endresultat, dass das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit aus Q austritt, ungefähr gleich

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) \Delta x \Delta y \Delta z \tag{17.1}$$

ist. Wir treffen folgende allgemeine Definition.

Definition 17.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt die durch*

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad x \in D$$

(mit $F = (F_1, \ldots, F_n)$) definierte Funktion $\operatorname{div} F : D \to \mathbb{R}$ *die* Divergenz *von F.*

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also eine *skalarwertige* Funktion. Wir können (17.1) somit schreiben als

$$(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividieren wir diesen Wert durch das Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ von Q und ziehen wir Q auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) zusammen, so können wir $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)$ als *Quellendichte* der Strömung im Punkt (x_0, y_0, z_0) interpretieren. Ist $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) > 0$, so ist (x_0, y_0, z_0) eine *Quelle* im eigentlichen Sinn (ihr entströmt Flüssigkeit). Im Fall $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) < 0$ heißt (x_0, y_0, z_0) auch eine *Senke* (da in diesem Punkt Flüssigkeit verschwindet).

Einige Rechenregeln für die Divergenz Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $F, G : D \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F+G) &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G, \\
\operatorname{div}(\lambda F) &= \lambda \operatorname{div} F \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F.
\end{aligned}$$

17.2 Der Gaußsche Integralsatz im Raum

Wir können nun die anschauliche Aussage des Gaußschen Integralsatzes in Formeln fassen. Es sei G ein geeigneter räumlicher Bereich und ∂G sein Rand (seine Oberfläche). Die genauen Voraussetzungen geben wir später an. In jedem Randpunkt haben wir zwei Normaleneinheitsvektoren: einen, der in den Körper hineinzeigt (die sogenannte *innere Normale*) und einen, der von G weg zeigt (die *äußere Normale*). Es sei $N : \partial G \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld der *äußeren* Normaleneinheitsvektoren. Weiter sei V das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Nach Abschnitt 16.2 (Interpretation des Flächeninhalts 2. Art) ist der Durchfluß durch ∂G in Richtung der äußeren Normalen (also das, was aus G *herausfließt*), gleich

$$\iint\limits_{\partial G} V \cdot N \, d\sigma. \tag{17.2}$$

Die durch Quellen und Senken in G hervorgebrachte Flüssigkeitsmenge erhalten wir dagegen durch Aufintegrieren der Quellendichte über G:

$$\iiint\limits_{G} (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \tag{17.3}$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz sind die Integrale (17.2) und (17.3) gleich. Nun zur exakten Formulierung.

Definition 17.2 a) *Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt C^1-*Normalbereich bzgl. der x_1x_2-Ebene*, wenn es eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ so gibt, dass*

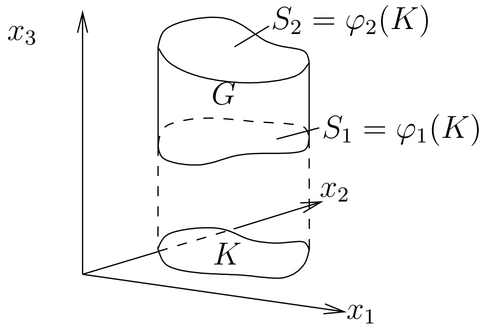
$$G = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x_1, x_2) \in K, \; \varphi_1(x_1, x_2) \le x_3 \le \varphi_2(x_1, x_2)\Big\}$$

gilt und dass der Rand ∂K durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg darstellbar ist. Analog erklärt man C^1-Normalbereiche bezüglich der x_2x_3- und x_1x_3-Ebene.

b) *Die Menge G heißt ein C^1-*Normalbereich*, wenn sie ein C^1-Normalbereich bezüglich der x_1x_2-, der x_2x_3- und der x_1x_3-Ebene ist.*

(Es sei noch einmal an unsere Vereinbarung erinnert: Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge K heißt stetig differenzierbar, wenn sie zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge $G \supseteq K$ fortgesetzt werden kann.)

Anmerkung Einen C^1-Normalbereich bzgl. der x_1x_2-Ebene kann man sich so vorstellen:



Der obere Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ ist ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung

$$F_2 : K \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto \big(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)\big).$$

Der durch F_2 bestimmte Normaleneinheitsvektor (vgl. Beispiel 5 aus 16.1)

$$N_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, 1\right)$$

ist der *äußere* Normaleneinheitsvektor für G (da die z-Komponente > 0 ist). Der untere Deckel S_1 wird beschrieben durch

$$F_1 : K \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto \big(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)\big),$$

und der zugehörigen Normaleneinheitsvektor ist

$$N_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \Big(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, 1\Big).$$

Dieser zeigt ebenfalls in Richtung der positiven z-Achse (also in G *hinein*), so dass der *äußere* Normalenvektor an G auf S_1 gleich $-N_1(u, v)$ ist. ∎

Satz 17.3 (Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$) *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich und $H : G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter bezeichne $N : \partial G \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von G. Dann ist*

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x)dx = \iint_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \tag{17.4}$$

Beweis Es genügt, die Aussage zu beweisen, wenn H die Gestalt $H = (0, 0, H_3)^T$ hat (man kann ja H als Summe dreier derartiger Ausdrücke schreiben, und die

Integrale in (17.4) sind linear in H). Nach Satz 15.15 erhalten wir wegen $\operatorname{div} H = \frac{\partial H_3}{\partial x_3}$

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} H)(x)dx = \iint\limits_K \Big(\int_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} \frac{\partial H_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3 \Big) d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_K \Big(H_3\big(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2)\big) - H_3\big(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2)\big)\Big) d(x_1,x_2).$$

Auf dem oberen Deckel $S_2 = \varphi_2(K)$ ist

$$H \cdot N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} H_3$$

und damit

$$\iint\limits_K H_3\big(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2)\big)\, d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_K (H \cdot N) \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}\, d(x_1,x_2)$$
$$= \iint\limits_{S_2} H \cdot N \, d\sigma.$$

Analog zeigt man, dass

$$-\iint\limits_K H_3\big(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2)\big)\, d(x_1,x_2) = \iint\limits_{S_1} H \cdot N \, d\sigma.$$

Auf dem noch fehlenden Randstück $\partial G \backslash (S_1 \cup S_2)$ von G, also auf

$$S_3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1,x_2) \in \partial K, \ \varphi_1(x_1,x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1,x_2)\},$$

existiert der äußere Normalenvektor N ebenfalls (bis auf endlich viele Geradenstücke $\{y\} \times [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ mit $y \in \partial K$, in denen die Parametrisierung von ∂K nicht differenzierbar ist), und die Komponente von N in x_3-Richtung ist 0. Daher ist $H \cdot N = 0$ auf S_3. Zusammengefasst erhalten wir

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} H)(x)dx = \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{S_j} H \cdot N \, d\sigma = \iint\limits_{\partial G} H \cdot N \, d\sigma. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 1 Wir kommen noch einmal zurück auf Beispiel 9 aus 16.2. Dort waren D und F wie in Beispiel 1 aus 16.1 (Kugeloberfläche) und $H(x,y,z) = (x,y,z)$, und wir haben erhalten, dass

$$\int_{\partial G} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial G} H \cdot N \, d\sigma = 4\pi r^3.$$

Andererseits ist $\operatorname{div} H = 3$, so dass mit dem Volumen V der Kugel G gilt

$$\int_G (\operatorname{div} H)(x) dx = 3 \int_G dx = 3V.$$

Der Gaußsche Satz liefert nach Gleichsetzen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 17.4 (Partielle Integration in $\mathbb{R}^3$) *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich und $f, g : G \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei $N = (N_1, N_2, N_3) : \partial G \to \mathbb{R}$ das äußere Normalenfeld an G. Dann gilt für $i = 1, 2, 3$*

$$\iiint\limits_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx = - \iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i} \, g \, dx + \iint\limits_{\partial G} f g N_i \, d\sigma. \tag{17.5}$$

Beweis Sei z.B. $i = 1$. Für die stetig differenzierbare Funktion

$$F : G \to \mathbb{R}^3, \quad F(x) = \big(f(x)g(x), 0, 0\big) \tag{17.6}$$

ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial (fg)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \, g + f \, \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

und $F \cdot N = f g N_1$. Die Behauptung folgt also sofort, wenn man die Funktion (17.6) in den Gaußschen Integralsatz (17.4) einsetzt. $\blacksquare$

Anmerkung 1 Wir haben in Satz 17.3 und Folgerung 17.4 statt $\int_G$ und $\int_{\partial G}$ die Schreibweisen $\iiint\limits_G$ und $\iint\limits_{\partial G}$ benutzt, um deutlich zu machen, dass (dreidimensionale) Volumenintegrale und (zweidimensionale) Oberflächenintegrale auftreten.

Anmerkung 2 Sind $F_1, \ldots, F_n$ Flächenstücke, die sich nicht überlappen, so definiert man das Flächenintegral über $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ durch

$$\int_F = \int_{F_1} + \ldots + \int_{F_n} .$$

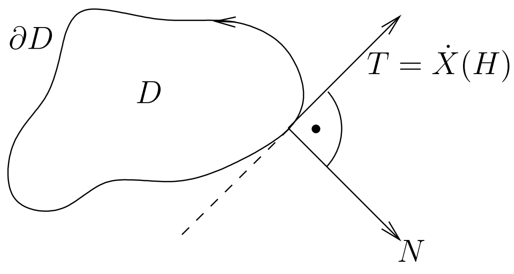
Dies haben wir im Beweis des Gaußschen Satzes benutzt ($\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$).

Anmerkung 3 Satz 17.3 und Folgerung 17.4 gelten auch noch unter schwächeren Voraussetzungen. Z.B. genügt es, dass sich G als endliche Vereinigung sich nicht überlappender C^1-Normalbereiche schreiben läßt. Man beachte auch, dass der Normalenvektor nicht in jedem Randpunkt definiert ist (z.B. nicht entlang der Kanten eines Quaders).

17.3 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Der Gaußsche Integralsatz und seine Folgerung gelten (bei geeigneter Definition des Flächenintegrals) in jeder Raumdimension n. Den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ kann man durch geeignete Reduzierung um eine Koordinate wie folgt aus dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gewinnen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der x_1- und der x_2-Achse (vgl. Abschnitt 15.3). In diesem Fall nennen wir D einfach einen *Normalbereich*. Der Rand ∂D sei eine geschlossene Kurve, die durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird. Durchläuft t das Intervall $[a, b]$ von a nach b, so wandert $X(t)$ entlang ∂G in einer bestimmten Richtung, und wir wollen annehmen, dass dabei G stets links des Weges liegt. Man sagt auch, dass *D vom Weg X positiv umlaufen wird* oder dass der Rand *∂D positiv orientiert* ist (anschaulich: im Gegenuhrzeigersinn).
Der Tangentialeinheitsvektor an ∂D im Punkt $X(t) = \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ ist $T := \big(\dot X_1(t), \dot X_2(t)\big)$, und $N := \big(\dot X_2(t), -\dot X_1(t)\big)$ ist ein auf T senkrecht stehender Vektor, der nach außen zeigt.



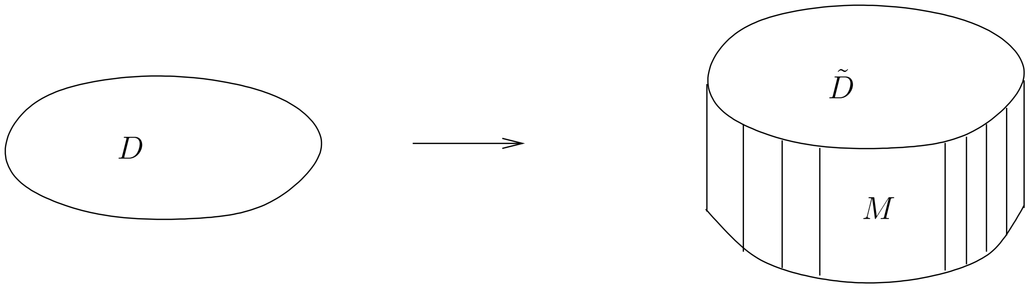
Man beachte, dass diese Vektoren nur in Punkten definiert sind, in denen X stetig differenzierbar ist. Auf D sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$V = (V_1, V_2)^T : D \to \mathbb{R}^2$$

gegeben. Wir bilden aus D den räumlichen Bereich

$$\tilde D := D \times [0,1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in D, x_3 \in [0,1]\},$$

d.h. $\tilde D$ ist eine Scheibe (= ein Zylinder) der Dicke 1, bei dem Boden und Deckel die Form von D haben. Offenbar ist $\tilde D$ ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$.



Außerdem setzen wir V auf $\tilde{D}$ fort und erweitern es um eine Komponente:

$$\tilde{V} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^3, \;\; \tilde{V}(x_1, x_2, x_3) := (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2), 0)^T.$$

Der Gaußsche Integralsatz (17.4), angewandt auf $\tilde{D}$ und $\tilde{V}$, liefert

$$\iint_{\partial \tilde{D}} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \tag{17.7}$$

Beim Flächenintegral auf der linken Seite heben sich die Anteile des Bodens und des Deckels weg, da die zugehörigen Normalenvektoren entgegengesetzt sind, sonst jedoch alles gleich ist (insbesondere ist $\tilde{V}(x_1, x_2, 0) = \tilde{V}(x_1, x_2, 1) = V(x_1, x_2)$). Es verbleibt also nur das Integral über die Mantelfläche $M = \partial D \times [0, 1]$. Aus (17.7) folgt somit

$$\iint_{M} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \tag{17.8}$$

Die Mantelfläche hat eine Parameterdarstellung

$$F(t, z) = \big(X_1(t), X_2(t), z\big)^T \quad \text{mit } (t, z) \in [a, b] \times [0, 1],$$

woraus man den äußeren (aber noch nicht normierten!) Normalenvektor im Punkt $F(t, z)$

$$n\big(F(t, z)\big) = \big(\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t), 0\big)^T$$

erhält. Mit (16.11) erhalten wir für die linke Seite von (17.8)

$$\begin{aligned}
\iint_{M} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma \quad &= \quad \iint_{M} \tilde{V} \cdot n \, \frac{1}{\|n\|} \, d\sigma \\
&\overset{(16.11)}{=} \iint_{[a,b]\times[0,1]} \tilde{V}\big(F(t, z)\big) \cdot n\big(F(t, z)\big) \, d(t, z) \\
&= \quad \int_0^1 \int_a^b V\big(X(t)\big) \cdot \big(\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t)\big) \, dt \, dz \\
&= \quad \int_a^b \Big(V_1\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) - V_2\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t)\Big) \, dt,
\end{aligned}$$

während auf der rechten Seite von (17.8)

$$\operatorname{div} \tilde{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} V$$

ist. Daher ist

$$\iiint\limits_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 \iint\limits_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2) \, dx_3 = \iint\limits_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2).$$

Zusammengefaßt erhalten wir

Satz 17.5 (Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich (bzgl. der x_1- und der x_2-Achse), dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D positiv umläuft. Weiter sei $V = (V_1, V_2)^T : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_a^b \Big(V_1\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) - V_2\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t) \Big) \, dt = \iint\limits_D (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \tag{17.9}$$

Man beachte, dass auf der linken Seite von (17.9) ein Wegintegral entlang des Weges X steht. Nehmen wir die Umbenennung

$$W_1 := V_2, \quad W_2 := -V_1, \quad W := (W_1, W_2)^T$$

vor, so geht nach Multiplikation mit -1 die linke Seite von (17.9) über in

$$\int_a^b \Big(W_1\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t) + W_2\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t) \Big) \, dt,$$

d.h. in das Wegintegral $\int_{\partial D} W \cdot dX$ über den durch X parametrisierten Rand von D, und auf der rechten Seite von (17.9) ist $-\operatorname{div} V = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$ zu ersetzen durch $\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$. Man schreibt oft

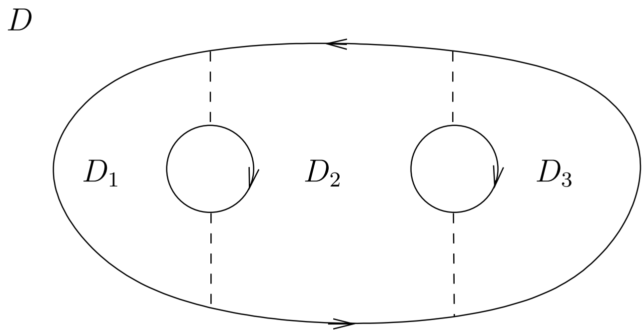
$$\operatorname{rot} W := \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \tag{17.10}$$

und nennt $\operatorname{rot} W$ die (skalarwertige) *Rotation* des Vektorfeldes W. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die folgende Version des Gaußschen Satzes im $\mathbb{R}^2$.

Satz 17.6 (Greenscher Integralsatz) *Seien D und X wie in Satz 17.5, und $W = (W_1, W_2)^T : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial D} W \cdot dX = \int_D \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_D (\operatorname{rot} W)(x) \, dx.$$

Die Sätze 17.5 und 17.6 gelten auch unter allgemeineren Bedingungen an die Menge D. Z.B. darf D die Abschließung eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes sein, dessen Rand sich durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisieren läßt. Es genügt sogar, dass D sich in endlich viele derartige Mengen zerlegen läßt.



Man beachte die Orientierung des (aus mehreren Stücken bestehenden) Randes.

17.4 Der Stokessche Integralsatz

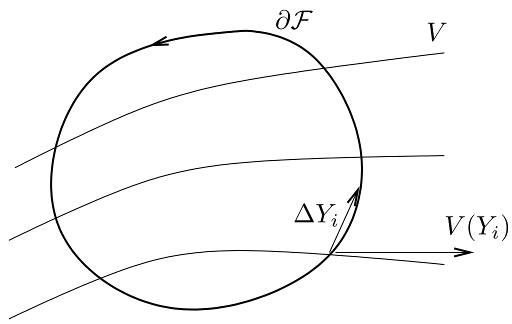
Wir beginnen mit einer kurzen Motivation. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit deuten. In M sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, dessen Rand durch einen stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Weg $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Unter der *Zirkulation von V entlang $\partial\mathcal{F}$* versteht man das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \int_a^b \sum_{i=1}^3 V_i\big(Y(t)\big)\dot{Y}_i(t)dt. \tag{17.11}$$

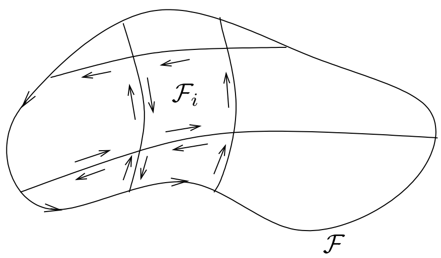
Denkt man sich dieses Integral durch Riemann-Summen

$$\sum_j V(Y_j) \cdot \Delta Y_j$$

approximiert, so entspricht jeder Summand $V(Y_i) \cdot \Delta Y_i$ einer Geschwindigkeitskomponenten in der Durchlaufrichtung der Kurve. Die Summation dieser Komponenten ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve $\partial\mathcal{F}$ umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve zirkuliert.



Wir zerlegen das Flächenstück $\mathcal{F}$ in endlich viele kleine Maschen $\mathcal{F}_i$.



Bei entsprechender Orientierung der Ränder der $\mathcal{F}_i$ erhalten wir für die Zirkulation

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \sum_i \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY = \sum_i \frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \cdot I(\mathcal{F}_i), \tag{17.12}$$

wobei $I(\mathcal{F}_i)$ für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}_i$ steht. Nun verfeinern wir die Maschen. Man kann zeigen (vgl. Burg/Haf/Wille IV, S. 156-158): Wenn man eine Masche $\mathcal{F}_i$ auf einen Punkt $x_i \in \mathcal{F}$ zusammenzieht, dann strebt der Quotient

$$\frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \tag{17.13}$$

gegen einen festen Wert, nämlich gegen $(\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)$. Dieser Ausdruck heißt auch die *Wirbelstärke* von V in x_i. Hierbei ist $N(x_i)$ die gemeinsame Flächennormale der zu x_i zusammengezogenen Maschen, und $\operatorname{rot} V$ ist wie folgt erklärt.

Definition 17.7 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F = (F_1, F_2, F_3)^T : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt das durch*

$$(\operatorname{rot} F)(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right)^T$$

definierte Vektorfeld $\operatorname{rot} F : D \to \mathbb{R}^3$ *die* Rotation *von* F.

Man beachte, dass man für ein Vektorfeld der Gestalt

$$F(x_1, x_2, x_3) = \big(F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ 0\big)$$

als Rotation gerade das Vektorfeld $\big(0, 0, \operatorname{rot}(F_1, F_2)\big)$ mit der in (17.10) eingeführten Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes erhält. Sind $F, G : D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder, so gelten offenbar die Regeln

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F + G) &= \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G \\ \operatorname{rot}(\lambda F) &= \lambda \operatorname{rot} F \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für kleine $\Delta\mathcal{F}_i$ können wir also (17.13) näherungsweise durch

$$(\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)$$

ersetzen, und aus (17.12) wird

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY \approx \sum_i (\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)\, I(\mathcal{F}_i). \tag{17.14}$$

Die rechte Seite ist eine Riemannsumme für das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot N \, d\sigma.$$

Der folgende Satz von Stokes sagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen an $\mathcal{F}$ die Zirkulation $\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY$ tatsächlich gleich diesem Flächenintegral über die Wirbelstärken ist.

Satz 17.8 (Stokes'scher Integralsatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D einmal positiv umläuft. Weiter sei $F : D \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, die ein Flächenstück $\mathcal{F} = F(D)$ parametrisiert. Der Weg $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $Y(t) = F\big(X(t)\big)$ definiert eine orientierte Kurve in $\mathcal{F}$, die wir den* Rand *$\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ nennen. Schließlich sei $N : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ das durch F wie in* (16.6) *festgelegte Normalenfeld. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$*

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY. \tag{17.15}$$

Beweis Es genügt, ein Vektorfeld H vom Typ $(P, 0, 0)^T$ zu betrachten. Der Beweis für $H = (0, Q, 0)^T$ und $H = (0, 0, R)^T$ verläuft analog. Zuerst schreiben wir das Kurvenintegral $\int_{\partial F} H \cdot dY$ über der Kurve $\partial\mathcal{F}$ in ein Kurvenintegral über ∂D um:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{F}} (P,0,0)^T \cdot dY &= \int_a^b P\big(Y(t)\big)\,\dot{Y}_1(t)dt \\
&= \int_a^b P\left(F\big(X(t)\big)\right)\,(F_1 \circ X)'(t)dt \\
&= \int_a^b P\left(F\big(X(t)\big)\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\big(X(t)\big)\dot{X}_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\big(X(t)\big)\dot{X}_2(t)\right)dt \\
&= \int_{\partial D}\left((P\circ F)\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\cdot dX,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben. Nach Satz 17.6 (Greenscher Integralsatz) ist dieses Integral gleich

$$\int_D \operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)(x)\,dx. \tag{17.16}$$

Wir berechnen die skalare (zweidimensionale) Rotation nach (17.10)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad= \frac{\partial}{\partial x_1}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) \\
&\quad= \frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + (P\circ F)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2\partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1\partial x_2}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir die Produktregel benutzt haben. Der letzte Summand ist nach dem Satz von Schwarz (Satz 13.11) gleich 0. Mit der Kettenregel erhalten wir für die ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\,\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \\
&\qquad - \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\,\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\
&\quad= \frac{\partial P}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial P}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).
\end{aligned}$$

Sei $n = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \times \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)$, d.h. $N = n/\|n\|$ ist der Normaleneinheitsvektor zu $\mathcal{F}$ (vgl. (16.6)). Nach Definition des Vektorprodukts ist

$$n_2 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

und damit zusammengefasst

$$\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial P}{\partial x_3}\,n_2-\frac{\partial P}{\partial x_2}\,n_3. \tag{17.17}$$

Wegen $\operatorname{rot} H=\operatorname{rot}(P,0,0)^T=\left(0,\,\frac{\partial P}{\partial x_3},\,-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)^T$ können wir (17.17) schreiben als

$$\operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)=\big((\operatorname{rot} H)\circ F\big)\cdot n.$$

Wir setzen dies in (17.16) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} H\cdot dY &= \int_D \operatorname{rot}\left((P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\,(P\circ F)\,\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)dx\\ &= \int_D \big((\operatorname{rot} H)\circ F\big)\cdot n\,dx\\ &= \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H\cdot d\vec{\sigma}=\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H\cdot N\,d\sigma\end{aligned}$$

nach der Definition 16.6 des Flächenintegrals. ∎

Beispiel 2 Sei $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi/2]\}$, $r>0$ und

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad F(u,v)=(r\cos u\cos v,\ r\sin u\cos v,\ r\sin v).$$

Das Flächenstück $F(D)$ ist die obere Halbkugelfläche um den Ursprung mit dem Radius r. Ein Vektorfeld H sei durch

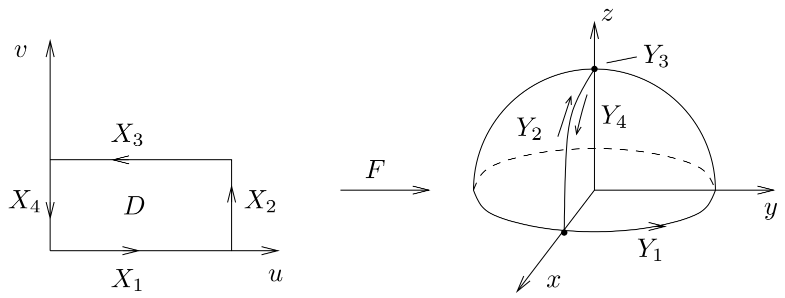
$$H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad H(x,y,z)=(-y,x,1)$$

gegeben. Der Rand ∂D des Rechtecks D läßt sich durch 4 Wege beschreiben:

$$\begin{aligned}X_1(t)&=(t,0)&&\text{mit}\quad t\in[0,2\pi],\\ X_2(t)&=(2\pi,t)&&\text{mit}\quad t\in[0,\pi/2],\\ X_3(t)&=(-t,\pi/2)&&\text{mit}\quad t\in[-2\pi,0],\\ X_4(t)&=(0,-t)&&\text{mit}\quad t\in[-\pi/2,0].\end{aligned}$$

Die zugehörigen Parameterdarstellungen $Y_k(t)=F\big(X_k(t)\big)$, $k=1,\dots,4$, für die Kurve $\partial F(D)$ sind

$$\begin{aligned}Y_1(t)&=(r\cos t,\ r\sin t,0)&&\text{mit}\quad t\in[0,2\pi],\\ Y_2(t)&=(r\cos t,0,r\sin t)&&\text{mit}\quad t\in[0,\pi/2],\\ Y_3(t)&=(0,0,r)&&\text{mit}\quad t\in[-2\pi,0],\\ Y_4(t)&=(r\cos t,0,-r\sin t)&&\text{mit}\quad t\in[-\pi/2,0].\end{aligned}$$



(Man beachte, dass $F(\partial D)$ *nicht* mit der Kreislinie in der xy-Ebene zusammenfällt!) Nun ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial F(D)} H \cdot dY &= \int_0^{2\pi} H\big(Y_1(t)\big) \cdot \dot{Y}_1(t)dt + \int_0^{\pi/2} H\big(Y_2(t)\big) \cdot \dot{Y}_2(t)dt \\ &\quad + \int_{-2\pi}^{0} H\big(Y_3(t)\big) \cdot \dot{Y}_3(t)dt + \int_{-\pi/2}^{0} H\big(Y_4(t)\big) \cdot \dot{Y}_4(t)dt.\end{aligned}$$

Wir berechnen das erste Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} H\big(Y_1(t)\big) \cdot \dot{Y}_1(t)dt &= \int_0^{2\pi} (-r\sin t,\ r\cos t,\ 1) \cdot (-r\sin t,\ r\cos t,\ 0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)dt = 2\pi r^2.\end{aligned}$$

Das dritte Integral ist wegen $\dot{Y}_3 = 0$ gleich 0, und das zweite und vierte Integral heben sich gegenseitig auf (dies ist auch sofort klar, wenn man sich die Wege Y_2, Y_3 und Y_4 ansieht). Also ist

$$\int_{\partial F(D)} H \cdot dY = 2\pi r^2.$$

Nach dem Satz von Stokes ist dann auch $\iint\limits_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N\, d\sigma = 2\pi r^2$, was wir zur Übung nachrechnen. Zunächst ist $\operatorname{rot} H = (0,0,2)$ und

$$N = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad \text{sowie} \quad \|F_u \times F_v\| = r^2 \cos v$$

nach Beispiel 4 aus Abschnitt 16.1. Damit wird

$$\begin{aligned}\iint\limits_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N\, d\sigma &= \iint\limits_{D} (\operatorname{rot} H)\big(F(u,v)\big) \cdot N(u,v)\, \|F_u \times F_v\|\, d(u,v) \\ &= \iint\limits_{D} 2\sin v \cdot r^2 \cos v\, d(u,v) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2v\, dv\, du = 2\pi r^2.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Auch der Satz von Stokes läßt sich unter schwächeren Voraussetzungen zeigen (vgl. Burg/Haf/Wille IV, S. 161). Wir vermerken noch eine interessante Konsequenz des Stokes'schen Satzes.

Folgerung 17.9 *Sei B ein stückweise glatt berandeter Bereich im $\mathbb{R}^3$ und $H : B \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\iint_{\partial B} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = 0.$$

Kurz gesagt: *Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist Null.*

Zum Beweis schneidet man einfach aus ∂B ein kleines geeignetes Flächenstück $\mathcal{F}$ heraus. Auf der verbleibenden Fläche ist nach Stokes

$$\iint_{\partial B \setminus \mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dX.$$

Zieht man $\mathcal{F}$ auf einen Punkt zusammen, so geht das Integral auf der rechten Seite gegen Null, da die Weglänge von $\partial \mathcal{F}$ gegen Null stebt. $\blacksquare$

17.5 Einige weitere Differential- und Integralformeln

17.5.1 Der Nabla-Operator

Der *symbolische* Vektor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ heißt *Nabla-Operator*. Formal rechnet man mit ihm wie mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^3$. In diesem Sinne ist also für stetig differenzierbare Vektorfelder V und Skalarfelder φ

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \operatorname{grad} \varphi \\ \nabla \cdot F &= \operatorname{div} F \\ \nabla \times F &= \operatorname{rot} F. \end{aligned}$$

Ist das Skalarfeld φ zweimal stetig differenzierbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

Der Operator

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt *Laplace-Operator*.

17.5.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren

Das Vektorfeld F und das Skalarfeld φ seien zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{rot} F &= 0, && (17.18)\\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi &= 0, && (17.19)\\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi &= \Delta\varphi. && (17.20) \end{aligned}$$

Man rechnet dies mit dem Satz von Schwarz leicht nach. Die ersten beiden Formeln besagen: *Wirbelfelder sind divergenzfrei* und *Gradientenfelder sind wirbelfrei.*

17.5.3 Produktregeln

Die Vektorfelder F, G und die Skalarfelder φ, ψ seien stetig differenzierbar. Dann gelten z.B. die folgenden Produktregeln, die man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi, && (17.21)\\ \operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi\operatorname{div} F + F\cdot\operatorname{grad}\varphi, && (17.22)\\ \operatorname{rot}(\varphi F) &= \varphi\operatorname{rot} F + \operatorname{grad}\varphi\times F, && (17.23)\\ \operatorname{div}(F\times G) &= G\cdot\operatorname{rot} F - F\cdot\operatorname{rot} G. && (17.24) \end{aligned}$$

Weitere Beziehungen finden Sie in der Literatur.

17.5.4 Die Greenschen Formeln

Es sei G wie im Gaußschen Integralsatz im Raum (Satz 17.3), und $f, g : G \to \mathbb{R}$ seien so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln verlangen. Aus Formel (17.22) (mit $F = \operatorname{grad} g$) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f\operatorname{grad} g) = f\Delta g + \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{grad} g,$$

wobei wir noch (17.20) benutzt haben. Integration über G und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf der linken Seite liefern

$$\iint\limits_{\partial G} f\operatorname{grad} g\cdot N\,d\sigma = \iiint\limits_{G} (f\Delta g + \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{grad} g)dx$$

mit dem äußeren Normalenvektor N an ∂G. Erinnern wir uns noch an die Richtungsableitung

$$\frac{\partial g}{\partial N} = \operatorname{grad} g\cdot N$$

(vgl. Definition 13.17 in Abschnitt 13.5), so gelangen wir zur *ersten Greenschen Integralformel*

$$\iint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial N}\, d\sigma = \iiint_G (f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dx. \tag{17.25}$$

Vertauscht man hierin f mit g und subtrahiert die erhaltene Formel von (17.25), so erhält man die *zweite Greensche Integralformel*

$$\iint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma = \iiint_G (f \Delta g - g \Delta f) dx. \tag{17.26}$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir hieraus

$$\iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial N} d\sigma = \iiint_G \Delta f dx. \tag{17.27}$$

Man kann Raumintegrale über Laplacesche Differentialausdrücke Δf also in Flächenintegrale umschreiben. Die Greenschen Formeln sind außerordentlich wichtig beim Studium von partiellen Differentialgleichungen.