Analysis I für M, LaG/M, Ph
14.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
15./16.07.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Komplexe Zahlen)

(a) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ gilt.

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$\text{(i)} \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\} \qquad \text{(ii)} \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0 \right\}$$

$$\text{(iii)} \quad \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(iz) < 0\} \qquad \text{(iv)} \quad \{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:

(a) Das ist unter Benutzung der Polardarstellung $z = |z|e^{i\arg(z)}$ recht einfach, wenn man die Behauptung für den Spezialfall $z_1 \in \mathbb{R}$ einmal gezeigt hat. Auf dem Weg zur Polardarstellung haben wir aber das zu Beweisende benutzt, daher rechnen wir das lieber direkt nach: Nach Satz 29.7 (a) ist $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}$. Nach Satz 29.6 (a) gilt $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Mit Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$ ergibt sich

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2).$$

Wieder mit Satz 29.7 (a) wird die rechte Seite zu $|z_1|^2|z_2|^2$. Die Eindeutigkeit der Wurzel aus den nicht-negativen reellen Zahlen $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$ liefert $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(b) (i) Das ist die randlose Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius 3.

(ii) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{z-i}{z-1}\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-1} = \frac{|z|^2 - z - i\bar{z} + i}{|z+1|^2} = \frac{x^2 + y^2 - x - iy - ix + y + i}{|z+1|^2},$$

also

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = \frac{-y - x + 1}{|z+1|^2}.$$

Da $|z+1|^2 > 0$ gilt, ist $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ genau dann, wenn der Punkt (x, y) auf der durch $y = 1 - x$ gegebenen Geraden abzüglich des Punktes $(1, 0) = 1$ liegt.

(iii) Der Streifen aller $z \in \mathbb{C}$ mit Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) \in (0, 1)$.

(iv) Das ist die Menge der drei Zahlen 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{2i\pi/3}$ und $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{4i\pi/3}$.

Aufgabe T2 (Additionstheoreme)

Zeigen Sie

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \text{und} \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Nach Satz 29.16 (b) ist

$$\mathrm{e}^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

Andererseits gilt nach Satz 29.16 (a) auch

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i(x+y)} &= \mathrm{e}^{ix}\cdot\mathrm{e}^{iy} = (\cos(x)+i\sin(x))\,(\cos(y)+i\sin(y))\\ &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)+i\,(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y))\,.\end{aligned}$$

Mit Vergleich der Real- und Imaginärteile folgen

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i(x+y)}) = \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i(x+y)}) = \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

Aufgabe T3 (Hadamard für komplexe Potenzreihen)

(a) Es sei $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^\infty$ beschränkt ist. Sei $\varrho := \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Zeigen Sie, dass die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, falls $\varrho = 0$ gilt, und andernfalls für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{\varrho}$ absolut konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{\varrho}$ divergiert.

Im ersten Fall sagt man, die Potenzreihe hat Konvergenzradius ∞, im zweiten $\frac{1}{\varrho}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=0}^\infty \frac{\mathrm{e}^{n+i}}{n^2} z^n, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=0}^\infty (1-i)^n\cdot\ln(1+n) z^n.$$

Lösung:

(a) Wenn $|z| < \frac{1}{\rho}$ gilt, dann konvergiert die reelle Reihe

$$\sum_{k=0}^\infty |a_n||z|^n$$

absolut, da $|z|$ innerer Punkt des Konvergenzintervalls der reellen Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty |a_n| x^n$ ist. Das heißt aber gerade, dass die komplexe Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_n z^n$ absolut konvergiert.

Ist $|z| > \frac{1}{\rho}$, dann gibt es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|z|}$ gilt, da $\frac{1}{|z|} < \rho$ ist und ρ ein Häufungspunkt von $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^\infty$. Daraus folgt aber

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_n||z|^n \geq 1,$$

wo $s_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ die n-te Partialsumme der Reihe ist. Also konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen nicht, d.h. die Reihe divergiert.

(b) (i) Mit $a_n := \frac{e^{n+i}}{n^2}$ ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^n|\mathrm{e}^i|}{n^2}} = \frac{\mathrm{e}}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt[n]{n^2}} = \mathrm{e}$ ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^\infty$ beschränkt und es gilt $\varrho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}$. Der gesuchte Konvergenzradius ist also $\frac{1}{\varrho} = 1/\mathrm{e}$.

(ii) Mit $a_n := (1-i)^n \cdot \ln(1+n)$ ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(1-i)^n\cdot\ln(1+n)} = \sqrt{2}\sqrt[n]{\ln(1+n)}.$$

Da $\mathrm{e}^n = (1+(\mathrm{e}-1))^n \geq 1+n(\mathrm{e}-1) \geq 1+n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Bernoullischer Ungleichung, folgt $n \geq \ln(1+n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \geq 3 > \mathrm{e}$ ist daher $n \geq \ln(1+n) \geq 1$ und nach dem Sandwichtheorem gilt dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(1+n)} = 1$. Also ist

$$\varrho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist somit $\frac{1}{\varrho} = 1/\sqrt{2}$.