Analysis I für M, LaG/M, Ph
13.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
08./09.07.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Potenzreihen)
Beweisen Sie, dass für alle $x \in (-1,1)$ gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Lösung: Einerseits gilt $\arctan' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Andererseits ergibt die geometrische Reihe für $\frac{1}{1+x^2}$ für $|x| < 1$ ergibt

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \mp \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

Nach Satz 25.1 ist die Potenzreihe A mit dieser Summe als Ableitung gegeben durch

$$A(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Nach Satz 23.17 c) folgt, dass auf dem Intervall $(-1,1)$ die Funktionen A und arctan bis auf eine Konstante übereinstimmen. Da $\arctan(0) = 0$ und $A(0) = 0$ stimmen beide Funktionen auf $(-1,1)$ überein, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe T2 (Potenzreihen und Taylorentwicklung)
Beweisen Sie

$$\operatorname{Artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$$

für $|x| < 1$

(a) durch geeignetes Entwickeln von $\operatorname{Artanh}'(x)$,

(b) mit Hilfe der geometrischen Reihe.

Lösung:

(a) Die Ableitung von $\operatorname{Artanh}(x)$ ist gegeben durch $\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} =: f(x)$. Die Ableitungen von f sind für $|x| < 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
f''(x) &= \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} \\
f'''(x) &= \frac{24x^3+24x}{(1-x^2)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24(5x^4+10x^2+1)}{(1+x^2)^5}
\end{aligned}$$

und per Induktion durch

$$f^(k)(x) = \begin{cases} k! & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Taylorentwicklung in $x = 0$ liefert nun

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 0 + \frac{2}{2!}x + 0 + \frac{24}{4!}x^4 + \dots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots . \end{aligned}$$

Diese Potenzreihe ist die Ableiung der Potenzreihe

$$F(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Der Konvergenzradius von F ist $\rho = 1$ nach Satz 15.2 und mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$ und Satz 7.8 d). Da $f = \operatorname{Artanh}'$ gilt, können sich F und Artanh nach Satz 23.17 c) höchstens durch eine Konstante unterscheiden. Aus $F(0) = 0$ und $\operatorname{Artanh}(0) = 0$ (da $\tanh(0) = 0$) folgt, dass die Konstante 0 sein muss.

(b) Es gilt $\operatorname{Artanh}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$. Die geometrische Reihe für $\frac{1}{1-x^2}$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad \forall |x| < 1$$

Nach Satz 25.1 ist die Potenzreihe A mit dieser Summe als Ableitung gegeben durch

$$A(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Nach Satz 23.17 c) folgt, dass auf dem Intervall $(-1, 1)$ die Funktionen A und Artanh bis auf eine Konstante übereinstimmen. Da $\operatorname{Artanh}(0) = 0$ und $A(0) = 0$ stimmen beide Funktionen auf $(-1, 1)$ überein, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe T3

Bestimmen Sie den Wert $1{,}05^{1{,}02}$ mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

Lösung: Wir verwenden die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{1{,}02}$ und betrachten ihr Taylorpolynom 1. Ordnung mit Entwicklungsstelle 1. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = 1{,}02 \cdot x^{0{,}02} \qquad f''(x) = 1{,}02 \cdot 0{,}02 \cdot x^{-0{,}98}$$

und $f(1) = 1$, sowie $f'(1) = 1{,}02$. Damit gilt

$$(T_1 f)(x, 1) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 1{,}02(x-1).$$

Für den Näherungsfehler $(R_1 f)(1{,}05; 1)$, der uns interessiert, erhalten wir

$$(R_1 f)(1{,}05; 1) = \frac{1}{2} f''(\xi)(1{,}05-1)^2 = 1{,}02 \cdot 0{,}01 \cdot \xi^{-0{,}98} \cdot 0{,}05^2 = 2{,}55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0{,}98}$$

für ein $\xi \in (1; 1{,}05)$. Nun ist die Funktion $g(t) := t^{-0{,}98}$ auf dem Intervall $(1; 1{,}05)$ monton fallend, denn für die Ableitung gilt auf diesem Intervall $g'(t) = -0{,}98 \cdot t^{-1{,}98} < 0$. Also nimmt g auf dem Intervall $(1; 1{,}05)$ maximal den Wert $g(1) = 1$ an und wir können

$$|(R_1 f)(1{,}05; 1)| = 2{,}55 \cdot 10^{-5} \cdot \xi^{-0{,}98} \le 2{,}55 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

abschätzen. Damit ist der Wert

$$(T_1 f)(1{,}05; 1) = 1 + 1{,}02(1{,}05 - 1) = 1 + 1{,}02 \cdot 0{,}05 = 1{,}051$$

ein für die Aufgabenstellung ausreichend exakter Näherungswert von $1{,}05^{1{,}02}$.