Analysis I für M, LaG/M, Ph
12.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
01./02.07.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Beweise oder widerlege)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) Jede Funktion ist differenzierbar.

(b) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

(c) Ist eine Funktion nicht stetig, so ist sie auch nicht differenzierbar.

(d) Sind f und g differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$, dann ist $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ differenzierbar.

(e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h. f ist eine gerade Funktion), dann ist $f'(-x) = -f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h. f' ist ungerade).

(f) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch (d.h. es gibt $p > 0$, so dass $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), dann ist f beschränkt.

Lösung:

(a) Das ist falsch. Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$.

(b) Das ist falsch. Gleiches Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$.

(c) Das ist wahr. Nach Satz 23.4 ist jede differenzierbare Funktion stetig. Also kann eine nicht stetige Funktion nicht differenzierbar sein.

(d) Das ist falsch. Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ sind differenzierbar, aber $F(x) = \max\{f(x), g(x)\} = |x|$ nicht.

(e) Das ist wahr. Wir betrachten die Verkettung g der „Spiegelung“ s der reellen Achse, $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x) = -x$, mit f, also $g(x) = (f \circ s)(x) = f(s(x)) = f(-x)$. Da f gerade ist, gilt $g = f$. Also ist $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andererseits folgt mit der Kettenregel $g'(x) = f'(s(x))s'(x) = -f'(-x)$.

(f) Das ist falsch. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sin(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

2π-periodisch, aber unbeschränkt. (Natürlich ist jede *stetige* periodische Funktion beschränkt, da sie auf dem kompakten Intervall $[0, p]$ beschränkt ist)

Aufgabe T2 (Fortsetzung der Ableitung)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und auf $D \setminus \{x_0\}$ differenzierbar. Weiter gelte $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar im Punkt x_0 ist und $f'(x_0) = a$ gilt.
Gilt in dieser Situation auch die Aussage

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ existiert nicht} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist in } x_0 \text{ nicht differenzierbar?}$$

Lösung: Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es zu jedem x_n ein ξ_n zwischen x_0 und x_n mit

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

(auch, wenn $x_n < x_0$). Da dann $|x_0 - \xi_n| < |x_0 - x_n|$ gilt, konvergiert die Folge (ξ_n) gegen x_0 und es folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Das zeigt nun insgesamt, dass f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = a$ gilt.
Die Aussage

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) \text{ existiert nicht} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist in } x_0 \text{ nicht differenzierbar}$$

gilt nicht! Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Nach der Gruppenübung ist diese Funktion in $x_0 = 0$ differenzierbar. Jedoch existiert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ nicht: Für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Diese Funktion ist aber nicht stetig im Punkt $x_0 = 0$, wie man wie in Aufgabe G3 vom 9. Übungsblatt sieht (man wähle die Folgen (x_n) und (y_n) mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ und $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$).
Bemerkung: Der erste Teil lässt sich auf den Satz von de l'Hospital zurückführen (setze $g(x) = f(x) - x_0$, $h(x) = x - x_0$, und betrachte $\lim_{x\to x_0} g(x)/h(x)$).

Aufgabe T3 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)
Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) \leq c \leq f'(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt, so dass $f'(\xi) = c$ gilt.

Lösung: Gilt bei einer der Ungleichungen $f'(a) \leq c$ und $c \leq f'(b)$ die Gleichheit, dann sind wir fertig. Sei also $f'(a) < c < f'(b)$. Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - cx$, ist stetig und hat daher ein Minimum auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dieses kann wegen $g'(a) = f'(a) - c < 0$ und $g'(b) = f'(b) - c > 0$ nicht an den Rändern angenommen werden: Wäre nämlich $f(a)$ minimal, dann wäre $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a, b]$, somit

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

ein Widerspruch. Wäre $f(b)$ minimal, dann wäre

$$f'(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Also muss das Minimum an einem inneren Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen werden. Nach Satz 23.14 gilt $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - c$, d.h. $f'(\xi) = c$.