Analysis I für M, LaG/M, Ph
10.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
17./18.06.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Eine weitere Charakterisierung von Stetigkeit)
Beweisen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in O\}$ jeder offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge ist.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (a) die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit.

Lösung:

(a)„$\Rightarrow$“: Sei f stetig, O offen. Zu zeigen ist, dass $f^{-1}(O)$ offen ist, d.h. dass es zu jedem $x_0 \in f^{-1}(O)$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} \subseteq f^{-1}(O)$. Sei also $x_0 \in f^{-1}(O)$ beliebig. Da $f(x_0) \in O$ und O offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$. Da f stetig ist, gibt es $\delta > 0$ derart, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Das bedeutet aber, dass $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Also ist $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(O)$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“: Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen ist, dass es $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Die Menge $O := U_\varepsilon(f(x_0))$ ist offen. Nach Annahme ist daher auch ihr Urbild $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ offen. Da x_0 ein Element davon ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$. Das bedeutet aber, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, d.h. f ist stetig in x_0. Da x_0 in dieser Argumentation beliebig war, ist f in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

(b)„$\Rightarrow$“: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Zu zeigen ist, dass $f^{-1}(A)$ ebenfalls abgeschlossen ist. Nun ist nach H2 (b) vom 1. Übungsblatt

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) \overset{\text{H2(b)}}{=} f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A).$$

Nach Definition ist $\mathbb{R} \setminus A$ offen. Mit Teil (a) und der Stetigkeit von f folgt, dass auch $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)$ als Urbild einer offenen Menge offen ist. Nach Definition ist daher $f^{-1}(A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)$ abgeschlossen, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist. Wir zeigen, dass dann auch das Urbild $f^{-1}(O)$ jeder offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ offen ist. Sei also $O \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann zeigt

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus O)) \overset{\text{H2(b)}}{=} \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus O),$$

dass $f^{-1}(O)$ offen ist - analog zu oben.

Aufgabe T2 (Cantor-Menge)
Wir definieren eine Folge von Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$, in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} C_0 &:= [0,1], \\ C_1 &:= C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ C_2 &:= C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein konstruieren wir C_{n+1}, indem wir von jedem der 2^n Intervalle, aus denen C_n besteht, jeweils das offene mittlere Drittel entfernen. Dann ist die *Cantormenge* C gegeben durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie, dass C kompakt ist und dass $C^\circ = \emptyset$ gilt.

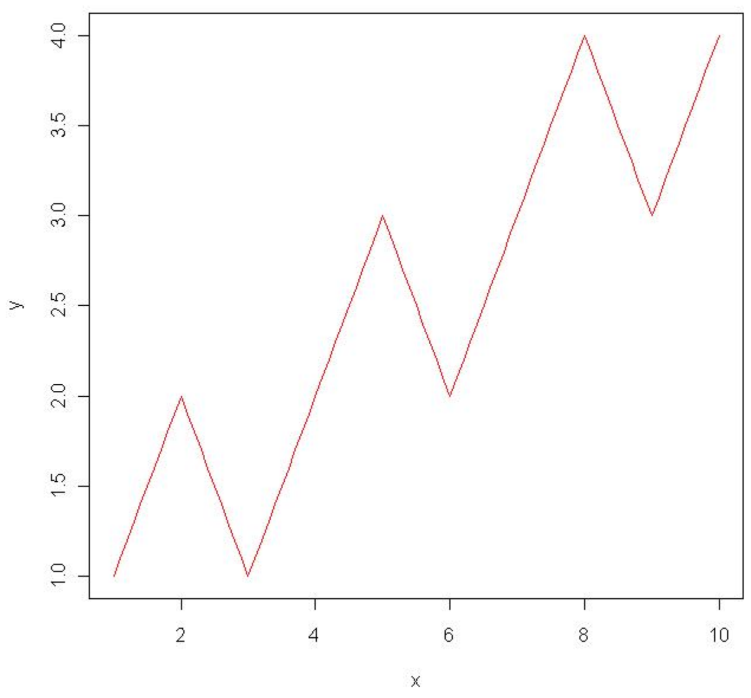
Lösung: Für die Kompaktheit von C reicht es nach dem Satz von Heine-Borel aus, Abgeschlossenheit und Beschränktheit zu zeigen.
C ist offensichtlich in $[0,1]$ enthalten und damit beschränkt. Wir zeigen also, dass C abgeschlossen ist.
Dazu sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, jeweils die Vereinigung der 2^n offenen Intervalle, die bei der Konstruktion von C_{n+1} aus C_n entfernt wurden. Es gilt also $C_{n+1} = C_n \setminus U_n = C_n \cap (\mathbb{R} \setminus U_n)$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist C_{n-1} abgeschlossen.
Beweis (Induktion):
Induktionsanfang: $C_{1-1} = [0,1]$ ist abgeschlossen.
Induktionsannahme: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung, d.h. C_{n-1} ist abgeschlossen.
Induktionsschritt: Da U_{n-1} als Vereinigung offener Intervalle offen ist (H1 a), ist $\mathbb{R} \setminus U_{n-1}$ per definitionem abgeschlossen. Nach Induktionsannahme ist auch C_{n-1} abgeschlossen. Somit ist $C_{n+1-1} = C_n = C_{n-1} \cap (\mathbb{R} \setminus U_{n-1})$ als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen (H1 b). Somit gilt die Behauptung auch für $n+1$. □

Schließlich ist die Cantormenge $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen (H1 b).
Es bleibt zu zeigen, dass $C^\circ = \emptyset$ gilt. Jede Menge C_n besteht aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge $(\frac{1}{3})^n$. Zwischen zwei solchen Intervallen liegen stets Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin C_n$. Ist also $I \subseteq C_n$ ein Intervall, welches in C_n liegt, dann muss I schon in *einem* der 2^n abgeschlossenen Intervalle enthalten sein, aus denen C_n besteht. Wir nehmen nun an, dass C einen inneren Punkt $x_0 \in C$ hat. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass das Intervall $I := U_\varepsilon(x_0)$ in C enthalten ist. Da die Folge $((\frac{1}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{3})^{N_0} < 2\varepsilon$. Da nach Annahme $I \subseteq C \subseteq C_{N_0}$ gilt, muss I in einem der 2^{N_0} Intervalle der Breite $(\frac{1}{3})^{N_0} < 2\varepsilon$ enthalten sein, aber das ist unmöglich. Also gilt $C^\circ = \emptyset$.

Aufgabe T3 (Zwischenwertsatz)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion die jeden Wert genau zweimal annimmt. Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist. Gibt es eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche jeden Wert genau dreimal annimmt?

Lösung: Angenommen f wäre stetig und nähme jeden Wert genau zweimal an. Seien x, y zwei verschiedene Punkte mit $f(x) = f(y)$. Für $z \in (x, y)$ ist dann $f(z) \neq f(x) = f(y)$. Da f stetig und $[x, y]$ kompakt ist, nimmt f auf $[x, y]$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum an. Wären Maximum und Minimum gleich, so wäre f auf $[x, y]$ konstant (Widerspruch). Insbesondere können nicht das Maximum *und* das Minimum am Rand angenommen werden. Sei also $z \in (x, y)$ so, dass $f(z) \neq f(x)$ maximal (bzw. minimal) ist und $\tilde{z}$ so, dass $f(z) = f(\tilde{z})$.
O.B.d.A. sei $z < \tilde{z}$. Ist $\tilde{z} \in (z, y)$, dann nimmt f auf dem Intervall $[z, \tilde{z}]$ ein Minimum (bzw. Maximum) an der Stelle $a \in (z, \tilde{z})$ an. Mit $b := \max\{f(x), f(a)\}$ (bzw. $b := \min\{f(x), f(a)\}$) wird nun nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert aus $(b, f(z))$ (bzw. aus $(f(z), b)$) in jedem der Intervalle (x, z), (z, a), $(a, \tilde{z})$ und $(\tilde{z}, y)$ angenommen, insgesamt mindestens viermal — ein Widerspruch.
Ist $\tilde{z} > y$, dann muss nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert im Intervall $(f(x), f(z))$ (bzw. $(f(z), f(x))$) in jedem der Intervalle (x, z), (z, y), $(y, \tilde{z})$ angenommen werden. Also werden all diese Werte mindestens dreimal angenommen — ein Widerspruch. Folglich ist f nicht stetig.
Stetige Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert genau dreimal annehmen, gibt es (Siehe Skizze:)


4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
y
2
4
6
8
10
x