Analysis I für M, LaG/M, Ph
10.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
17./18.06.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Eine weitere Charakterisierung von Stetigkeit)
Beweisen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in O\}$ jeder offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge ist.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (a) die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit.

Aufgabe T2 (Cantor-Menge)
Wir definieren eine Folge von Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$, in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} C_0 &:= [0,1], \\ C_1 &:= C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ C_2 &:= C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \\ \vdots \; &\;\vdots \;\; \vdots \end{aligned}$$

Allgemein konstruieren wir C_{n+1}, indem wir von jedem der 2^n Intervalle, aus denen C_n besteht, jeweils das offene mittlere Drittel entfernen. Dann ist die *Cantormenge* C gegeben durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie, dass C kompakt ist und dass $C^\circ = \emptyset$ gilt.

Aufgabe T3 (Zwischenwertsatz)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion die jeden Wert genau zweimal annimmt. Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist. Gibt es eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche jeden Wert genau dreimal annimmt?