Analysis I für M, LaG/M, Ph
9.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
10./11.06.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Häufungspunkte)
Beweisen Sie Satz 17.2 a) aus dem Skript:
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
x_0 ist ein Häufungspunkt von D genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ die Menge $D \cap U_\epsilon(x_0)$ unendlich ist.

Lösung: $\Rightarrow$: Sei x_0 ein Häufungspunkt. Wir nehmen an, die Folgerung sei nicht erfüllt, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $D \cap U_\epsilon(x_0)$ endlich ist. Setze nun $\delta = \min\left\{|x_0 - x| : x \in \left(D \cap U_\epsilon(x_0)\right) \setminus \{x_0\}\right\}$. Das Minimum existiert, da die Menge nach Annahme endlich ist. Daraus folgt aber nun, dass die Menge $(D \cap U_{\delta/2}(x_0)) \setminus \{x_0\}$ leer ist. Dies steht aber im Widerspruch zu der Annahme, dass x_0 ein Häufungspunkt ist.
$\Leftarrow$: Angenommen, die Menge $D \cap U_\epsilon(x_0)$ ist für alle $\epsilon > 0$ unendlich. Dann gibt es sicher ein $x \in (D \cap U_\epsilon(x_0)) \setminus \{x_0\}$ und x_0 ist ein Häufungspunkt.

Aufgabe T2 (Stetigkeit)
Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in jedem irrationalen Punkt stetig und in jedem rationalen Punkt unstetig ist.

Lösung: Sie zuerst $x_0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Wir betrachten eine Folge (x_n) mit $x_n \notin \mathbb{Q}$ und $x_n \to x_0$, etwa $x_n = x_0 + \sqrt{2}n^{-1}$, falls $x_0 < 1$ und $x_0 - \sqrt{2}n^{-1}$, falls $x_0 = 1$. Dann gilt $f(x_n) = 0 \to 0 \neq f(x_0)$. Damit ist f an der Stelle$x_0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig.

Sei nun $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und (x_n) eine Folge in $[0,1]$ mit $x_n \to x_0$. Enthlält die Folge nur endlich viele rationale Zahlen, so ist nichts mehr zu zeigen, da unmittelbar $f(x_n) = 0 \to 0 = f(x_0)$ folgt. Enthält die Folge (x_n) undendlich viele rationale Zahlen, so betrachten wir die Teilfolge (x_n^*) von (x_n), die nur die rationalen Folgenglieder enthält. Da für die Teilfolge $(x_n^{**}$, die nur irrationale Zahlen enthält (falls es denn unendlich viele gibt), sowieso $f(x_n^{**} = 0 \to 0$ gilt, genügt es $f(x_n^*) \to 0$ zu zeigen. Wir müssen also $q_n^{-1} \to 0$ zeigen, falls $x_n^* = \frac{p_n}{q_n}$. Wir nehmen hierzu das Gegenteil an, es gelte also $q_n^{-1} \nrightarrow 0$. Dann gibt es eine Teilfolge (q_{n_k}) von (q_n), die beschränkt ist. Wegen $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} \to x_0$ ist auch die Folge (p_{n_k}) beschränkt. Es gibt also eine endliche Teilmenge $N_0 \subseteq \mathbb{N}$, so dass $q_{n_k}, p_{n_k} \in N_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Also gibt es eine endliche Teilmenge Q_0 von $\mathbb{Q}$ mit $r_{n_k} = \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} \in Q_0$. Da endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind (endliche Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen mit jeweils einem Element) und $r_{n_k} \to x_0$ gilt, folgt auch $x_0 \in Q_0$. Dies ist aber ein Widerspruch, da x_0 irrational ist. Damit ist also f stetig an allen irrationalen Stellen.

Aufgabe T3
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der „Funktionalgleichung”

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Zeigen Sie der Reihe nach:

(a) $f(0) = 0$,

(b) $f(-x) = -f(x)$,

(c) $f(x-y) = f(x) - f(y)$,

(d) $f\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q}f(x)$ für $q \in \mathbb{N}$,

(e) $f(rx) = rf(x)$ für $r \in \mathbb{Q}$,

(f) ist f stetig in 0, so ist f stetig (auf $\mathbb{R}$),

(g) ist f stetig, so ist $f(x) = ax$ mit $a := f(1)$.

Anmerkung: Es gibt auch unstetige Funktionen, die der Funktionalgleichung genügen!

Lösung:

(a) $f(0) = f(0+0) = 2f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$.

(b) $0 \overset{a)}{=} f(x-x) = f(x) + f(-x) \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$.

(c) $f(x-y) = f(x) + f(-y) \overset{b)}{=} f(x) - f(y)$.

(d) $f(x) = f\left(q\frac{1}{q}x\right) = qf\left(\frac{1}{q}x\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q}f(x)$.

(e) $p, q \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(\frac{p}{q}x) = pf(\frac{1}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$. Damit gilt also $f(rx) = rf(x)$ für alle rationalen r.

(f) $x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) - f(x) = f(x_n - x) \to f(0) \overset{a)}{=} 0$.

(g) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $r_n \in \mathbb{Q}, r_n \to x$. Dann ist $f(r_n) = f(r_n \cdot 1) = r_n f(1)$, und somit $f(r_n) \overset{f)}{\to} f(x)$ und $r_n f(1) \to x f(1)$, d.h. $f(x) = xf(1)$.