Analysis I für M, LaG/M, Ph
8.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
04.06.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Konvergenzkriterien)
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

absolut konvergiert.

Lösung: Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, folgt $|a_n| \leq 1/2$ für n groß genug. Also

$$\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| \leq \frac{|a_n|}{1-\frac{1}{2}} = 2|a_n|$$

für fast alle n. Daher konvergiert die Reihe absolut wegen des Majorantenkriteriums.
Bemerkung: Auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe T2 (Aus alt mach neu)

(a) Seien $r > 0$ und $f, g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die sich als Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit Konvergenzradius größer r schreiben lassen. Überlegen Sie sich zwei verschiedene Möglichkeiten, wie man daraus Potenzreihen zu weiteren Funktionen bauen kann. Finden Sie jeweils Beispiele.

(b) Stellen Sie die folgenden Funktionen als Potenzreihen dar.

$$\text{(i)} \quad E\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1,1).$$

(c)* Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Lässt sich

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

als Potenzreihe darstellen?

Lösung:

(a)
- Addition: Die Funktion $(-r, r) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$, wird nach Satz 12.8 durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ dargestellt, die mindestens den Konvergenzradius r hat.
  Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Dann: $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Multiplikation: Eine Potenzreihe zur Funktion $(-r, r) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ mit Konvergenzradius mindestens r ist durch das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, gegeben.
  Spezialfälle davon sind Multiplikation mit reellen Zahlen oder mit x.
  Beispiel: $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Dann $f(x) \cdot g(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$.

- Division: siehe Teil (c).
  Beispiel: $\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 1 - x$.
- Verkettung: Liegt das Bild von g in $(-r, r)$, d.h. ist $\{g(x) : x \in (-r, r)\} \subseteq (-r, r)$, dann lässt sich die Funktion $f \circ g : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$ bilden. Eine Potenzreihe zu $f \circ g$ lässt sich im Prinzip finden, indem man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right)^n$$

  mittels mehrfacher Cauchy-Produkte berechnet. Zum Beweis, dass die so erhaltene Reihe positiven Konvergenzradius ρ hat, siehe z.B. Walter 7.13. Zur Idee (kein Beweis): Wähle zunächst $\rho \in (0, r)$ so, dass $\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \rho^k < r$ (benutze dazu die Stetigkeit, Satz 18.6).

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} x^k$$

  ist das n-fache Cauchy-Produkt, wobei

$$c_k^{(n)} = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{n-k_1-\cdots-k_{n-1}} b_{k_1} b_{k_2} \cdots b_{k_n}.$$

  Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} x^k$ konvergiert absolut auf $(-\rho, \rho)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{(n)}||x|^k \leq \alpha^n < r^n$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} x^k \right)$ als Reihe über n und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n c_k^{(n)} x^k.$$

  Um aus dieser Doppelreihe eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ zu machen, müsste man „nur noch" die beiden Summenzeichen vertauschen und sich überlegen, dass $d_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_k^{(n)}$ für jedes k konvergiert. Beides wird glücklicherweise klappen.
  Beispiele: siehe Teil (b).
  Übrigens kann der Konvergenzradius der oben konstruierten Potenzreihe von $f \circ g$ durchaus kleiner sein als r. Setze beispielsweise $r = 2$, $g(x) = \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4} \right)^n$ und $f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n$. Dann sollte die Potenzreihe zu $f \circ g$ Konvergenzradius $\sqrt{\frac{7}{2}} < 2$ haben.

(b) (i) Einsetzen in die Exponentialreihe liefert

$$E\left(-\frac{x^2}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}.$$

(ii) Mit der geometrischen Reihe ist

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

Dabei ist zu beachten, dass mit $x^3 \in (-1, 1)$ auch $-x^3 \in (-1, 1)$ im Konvergenzintervall der geometrischen Reihe liegt.

(c) Sicher nicht, wenn $a_0 = 0$. Ansonsten ist es aber nicht allzu schwer, eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit Konvergenzradius 0 zu finden, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ für alle x im Konvergenzbereich von $\sum_{n=0} b_n x^n$ (d.h. für $x = 0$). Daher hoffen wir mit folgendem Ansatz eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius zu finden:
Wir suchen eine Folge (b_n), so dass für das Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right),$$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, gilt:

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist nämlich $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{-1}$ für alle x im gemeinsamen Konvergenzbereich der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
Aus obiger Forderung an (c_n) ergeben sich unendlich viele Gleichungen

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0, \quad \ldots$$

Dabei tauchen in der n-ten Gleichung genau die Glieder $b_0, b_2, \ldots, b_{n-1}$ der Folge (b_n) als Variablen auf. Diese Gleichungen lassen sich also sukzessive auflösen: Definiert man rekursiv $b_0 := \frac{1}{a_0}$,

$$b_n := -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k},$$

dann werden alle Gleichungen erfüllt und es ergibt sich gerade das gewünschte Cauchy-Produkt.
Nun möchten wir zeigen, dass die so erhaltene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tatsächlich positiven Konvergenzradius hat. Das wird leider etwas technisch, ist aber beweisbar. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ positiven Konvergenzradius hat, ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ beschränkt durch ein $C > 0$. Es ist also $|a_n| \leq C^n$ für alle n.

Behauptung: $|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^n C^n$.
Beweis (Induktion): Tatsächlich wird eine stärker wirkende Aussage bewiesen, nämlich dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\forall m \in \mathbb{N}_0,\ m < n : |b_m| \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^m C^m$. Daraus folgt die Behauptung, aber diese stärkere Annahme wird den Induktionsschritt leichter machen.
Induktionsanfang: $n = 1$ $(m = 0)$: $|b_0| = \frac{1}{|a_0|} \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^0 C^0$ stimmt.
Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte: $\forall m \in \mathbb{N}_0,\ m < n : |b_m| \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^m C^m$.
Induktionsschritt: Nach Induktionsannahme gilt die Ungleichung $|b_m| \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^m C^m$ schon für $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Noch zu zeigen bleibt sie für $m = n$:

$$|b_n| \overset{\text{Def.}}{=} \left|\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} |a_k b_{n-k}| \overset{\text{Ind.-Vorr.}}{\leq} \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} C^k \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^{n-k} C^{n-k} = \frac{C^n}{|a_0|^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^k$$
$$= \frac{C^n}{|a_0|^2}\,\frac{\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right) - 1} = \frac{C^n}{|a_0|}\left(\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^n - 1\right) \leq \frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right)^n C^n.$$

Damit gilt die Ungleichung für $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, die Induktionsannahme also für $n + 1$. □
Es folgt, dass $\sqrt[n]{|b_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{|a_0|}}\left(1 + \frac{1}{|a_0|}\right) C$. Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_0|} = 1$, ist die Folge $\left(1/\sqrt[n]{|a_0|}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, also beschränkt. Somit ist auch die Folge $\left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Nach dem Satz von Hadamard hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ also positiven Konvergenzradius. q.e.d.

Aufgabe T3 (Potenzreihen)
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(b) Wir setzen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in (0, r)$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(x)| \leq M(s)\exp(|x|/s).$$

Lösung:
Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ hat Konvergenzradius ∞ und für jedes $s \in (0,r)$ gibt es eine Konstante $M(s) > 0 : |f(x)| \leq M(s)\exp(|x|/s)$.
Beweis: Es sei $s \in (0,r)$ gegeben. Dann gilt $1/r < 1/s$ und da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius r hat, muss $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r < 1/s$ sein. Also gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/s$ für alle $n \geq N_0$ gilt. Für all diese n haben wir damit auch $|a_n| < 1/s^n$.
Setzen wir $M(s) := \max\{1, |a_0|, s|a_1|, s^2|a_2|, \ldots, s^{N_0-1}|a_{N_0-1}|\}$, so gilt für alle $n \geq N_0$ mit dem oben erreichten

$$|a_n| = 1 \cdot |a_n| \leq M(s) \cdot |a_n| < M(s)\frac{1}{s^n}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq N_0 - 1$ haben wir

$$|a_n| = |a_n| \cdot s^n \frac{1}{s^n} \leq M(s)\frac{1}{s^n}.$$

Zusammengenommen gilt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung $|a_n| \leq M(s)/s^n$. Damit haben wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{|a_n||x|^n}{n!} \leq \frac{M(s)}{n!}\frac{|x|^n}{s^n}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(s)}{n!}\left(\frac{|x|}{s}\right)^n = M(s) \cdot \exp(|x|/s)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, ist damit nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, also ist der Konvergenzradius dieser Reihe ∞. Weiter erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}|x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(s)}{n!}\left(\frac{|x|}{s}\right)^n = M(s)\exp(|x|/s),$$

was die gewünschte Abschätzung ist. $\square$