Analysis I für M, LaG/M, Ph
8.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
04.06.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Konvergenzkriterien)
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

absolut konvergiert.

Aufgabe T2 (Aus alt mach neu)

(a) Seien $r > 0$ und $f, g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die sich als Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit Konvergenzradius größer r schreiben lassen. Überlegen Sie sich zwei verschiedene Möglichkeiten, wie man daraus Potenzreihen zu weiteren Funktionen bauen kann. Finden Sie jeweils Beispiele.

(b) Stellen Sie die folgenden Funktionen als Potenzreihen dar.

$$\text{(i)} \quad E\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

(c)* Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Lässt sich

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

als Potenzreihe darstellen?

Aufgabe T3 (Potenzreihen)
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(b) Wir setzen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in (0, r)$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(x)| \leq M(s) \exp(|x|/s).$$