Analysis I für M, LaG/M, Ph
7.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
27./28.05.2010

Tutorium

Aufgabe T1

(a) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^n \quad (|q| < 1).$$

(b) Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der beiden divergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit

$$a_0 = -1, \quad a_n = 1 \quad (n \geq 1)$$

und

$$b_0 = 2, \quad b_n = 2^n \quad (n \geq 1)$$

absolut konvergiert.

Aufgabe T2

Beweisen Sie das folgende Lemma:
Für eine Folge $(a_n)_n$ positiver reeller Zahlen, für die die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ beschränkt ist, gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $L := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existiert.

(b) Sei $q > L$ und sei r eine beliebige reelle Zahl mit $L < r < q$. Zeigen Sie, dass ein n_0 existiert, so dass für alle $n > n_0$ gilt $a_{n+1} < r a_n$.

(c) Schließen Sie, dass $a_{N+k} \leq r^k a_N$ und $r^k a_N = r^{N+k} C$ für ein geeignetes C und $k = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass dies $\sqrt[n]{a_n} \leq r \sqrt[n]{C}$ impliziert für $n > N$.

(d) Zeigen Sie, dass ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $m > M$ impliziert $\left(\frac{q}{r}\right)^m \geq C$. Zeigen Sie, dass für diese m die Beziehung $r \sqrt[m]{C} \leq q$ gilt.

(e) Schließen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq q$ und argumentieren Sie, dass dies die Behauptung impliziert.

Leiten Sie das Quotientenkriterium als Konsequenz aus dem Wurzelkriterium und diesem Lemma her.

Aufgabe T3

Finden Sie eine Folge positiver Zahlen a_n, so dass $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.