Analysis I für M, LaG/M, Ph
6.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
20./21.05.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Riemann II)
Wir möchten in dieser Aufgabe den Riemannschen Umordnungssatz beweisen, den Sie vielleicht schon in der OWO kennengelernt haben:

> Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe und ist $x \in \mathbb{R}$ gegeben, dann gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ der Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x$.

Die Idee zum Beweis des Satzes ist, so lange positive Glieder zu addieren, bis x überschritten wurde. Dann so lange negative Glieder zu addieren, bis x unterschritten wurde. Dann wieder positive ... usw. Die so entstandene Umordnung der Reihe wird dann gegen x konvergieren.

(a) In Aufgabe G3 (6. Übungsblatt) haben Sie gesehen, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergieren, wobei $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$ und $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$. Sei nun $(p_l)_{l=1}^{\infty}$ die Teilfolge der Glieder von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \geq 0$ und $(q_l)_{l=1}^{\infty}$ diejenige mit $a_n < 0$. Machen Sie sich klar, dass $\sum_{l=1}^{\infty} p_l$ und $\sum_{l=1}^{\infty} q_l$ divergieren.

(b) Zeigen Sie $\lim_{l\to\infty} p_l = 0$ und $\lim_{l\to\infty} q_l = 0$.

(c) Sei $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $k' \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $y + \sum_{l=k'+1}^{k} p_l > x$.
Analog: Ist $m' \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $y + \sum_{l=m'+1}^{m} q_l < x$.
Daher lassen sich rekursiv zwei Folgen $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ und $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ definieren durch $k_1 := 0$, $m_1 := 0$,

$$k_{i+1} := \text{Minimum der } k \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k} p_l > x,$$

$$m_{i+1} := \text{Minimum der } m \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m} q_l < x.$$

(d) Überlegen Sie sich, dass für $i > 2$

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l \leq x + p_{k_{i+1}}$$

und

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m_{i+1}} q_l \geq x + q_{m_{i+1}}.$$

(e) Zeigen Sie: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $i_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k \geq k_{i_0}$ gilt

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k} p_l < x + \varepsilon,$$

wenn $k_i < k \le k_{i+1}$, und für alle $m \ge m_{i_0}$ gilt

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m} q_l > x - \varepsilon,$$

falls $m_i < m \le m_{i+1}$.

(f) Wir definieren eine Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ durch

$$b_n := \begin{cases} p_k, & \text{falls } n = m_i + k \text{ für } i, k \in \mathbb{N} \text{ mit } k_i < k \le k_{i+1} \\ q_m, & \text{falls } n = k_{i+1} + m \text{ für } i, m \in \mathbb{N} \text{ mit } m_i < m \le m_{i+1} \end{cases}$$

Dies entspricht einer Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x$.

Lösung:

(a) Zu jedem p_l ($l \in \mathbb{N}$) gibt es $n_l \in \mathbb{N}$ mit $p_l = a_{n_l}^+$ und alle a_n^+ „dazwischen“ sind Null. Daher ist $\sum_{l=1}^{k} p_l = \sum_{n=1}^{n_k} a_n^+$, aber die Folge auf der rechten Seite divergiert.

Entsprechend für $(q_l)_{l=1}^{\infty}$.

(b) Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Das gilt dann auch für alle Teilfolgen von (a_n), insbesondere für (p_l) und (q_l).

(c) *Behauptung:* Ist $k' \in \mathbb{N}$, dann existiert ein Index $k \ge k'$, sodass $y + \sum_{l=k'+1}^{k} p_l > x$.

Beweis: Angenommen das ist falsch. Dann gibt es $k' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $y + \sum_{l=k'+1}^{k} p_l \le x$. Also $\sum_{l=1}^{k} p_l \le x - y + \sum_{l=1}^{k'} p_l$, die Folge der Partialsummen von $\sum_{l=1}^{\infty} p_l$ ist demnach beschränkt. Wegen $p_l \ge 0$ konvergiert $\sum_{l=1}^{\infty} p_l$ nach dem Monotonie-Kriterium für Reihen (Satz 12.5 a), ein Widerspruch. Daher gibt es solch ein k'. $\square$

Analog:

Behauptung: Ist $m' \in \mathbb{N}$, dann existiert ein Index $m \ge m'$, sodass $y + \sum_{l=m'+1}^{m} q_l < x$.

Beweis: Angenommen das ist falsch. Dann gibt es $m' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $y + \sum_{l=m'+1}^{m} q_l \ge x$. Also $\sum_{l=1}^{m} q_l \le x - y + \sum_{l=1}^{m'} q_l$, die Folge der Partialsummen von $\sum_{l=1}^{\infty} q_l$ ist demnach beschränkt. Wegen $q_l \le 0$ konvergiert $\sum_{l=1}^{\infty} q_l$ nach dem Monotonie-Kriterium für Reihen (Satz 12.5 a), ein Widerspruch. Daher gibt es solch ein m'. $\square$

Für $n \ge 2$ kann man gerade Gezeigtes auf

$$y := \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l$$

bzw.

$$y := \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l$$

direkt anwenden. Für $n = 2$ wählt man $y = p_1$ bzw. $y = \sum_{l=k_1}^{k_2} p_l + q_1$. Wegen des Wohlordnungsprinzips gibt es minimale Indizes k und m, welche die geforderte Bedingung erfüllen.

(d) Wäre

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l > x + p_{k_{i+1}},$$

dann auch

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}-1} p_l > x,$$

im Widerspruch zur Minimalität von k_{i+1}.

Wäre

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m_{i+1}} q_l < x - q_{m_{i+1}},$$

dann auch

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m_{i+1}-1} q_l < x,$$

d.h. $m_{i+1} - 1$ hätte auch schon genügt.

(e) Wegen $\lim_{l\to\infty} p_l = 0$ gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|p_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt für alle $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k} p_l \\ &\leq \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l \leq x + p_{k_{i+1}} < x + \varepsilon,\end{aligned}$$

wenn $k_i < k \leq k_{i+1}$.
Entsprechend gibt es m_0 für (q_l).
Wähle ein i_0 derart, dass $k_{i_0} \geq k_0$ und $m_{i_0} \geq m_0$. Dann gelten beide Ungleichungen.

(f) Die Folge (b_n) ist gerade so definiert, dass

$$\sum_{n=1}^{s} b_n = \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} q_l + \sum_{l=k_i+1}^{k} p_l,$$

falls $s = m_i + k$ für $i, k \in \mathbb{N}$ mit $k_i < k \leq k_{i+1}$, und

$$\sum_{n=1}^{s} b_n = \sum_{l=k_1+1}^{k_2} p_l + \sum_{l=m_1+1}^{m_2} q_l + \sum_{l=k_2+1}^{k_3} p_l + \cdots + \sum_{l=k_i+1}^{k_{i+1}} p_l + \sum_{l=m_i+1}^{m} q_l,$$

falls $s = k_{i+1} + m$ für $m_i < m \leq m_{i+1}$.
Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle i_0 wie in Teil (e). Setze $s_0 := k_{i_0} + m_{i_0}$.
Für $s \geq s_0$ gibt es zwei Fälle:

- Ist $s_0 \leq s = m_i + k$ für $i, k \in \mathbb{N}$ mit $k_i < k \leq k_{i+1}$, dann ist $k \geq k_i \geq k_{i_0}$, daher $\sum_{n=1}^{s} b_n < x + \varepsilon$, nach Teil (e). Außerdem ist $\sum_{n=1}^{s} b_n \geq \sum_{n=1}^{k_i+m_i} b_n > x - \varepsilon$, denn der Teil $\sum_{n=k_i+m_i+1}^{s} b_n$ kommt aus (p_l), ist also positiv. Insgesamt ist $\left|\sum_{n=1}^{s} b_n - x\right| < \varepsilon$.
- Ist $s_0 \leq s = k_{i+1} + m$ für $i, m \in \mathbb{N}$ mit $m_i < m \leq m_{i+1}$, dann ist $m \geq m_i \geq m_{i_0}$, daher $\sum_{n=1}^{s} b_n > x - \varepsilon$, nach Teil (e). Außerdem ist $\sum_{n=1}^{s} b_n \leq \sum_{n=1}^{k_i+m_i} b_n < x + \varepsilon$, denn der Teil $\sum_{n=k_i+m_i+1}^{s} b_n$ kommt aus (q_l), ist also negativ. Insgesamt ist $\left|\sum_{n=1}^{s} b_n - x\right| < \varepsilon$.

Das zeigt die Konvergenz.

Aufgabe T2 (Konvergente Reihen)

(a) Es seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_1 a_n + \lambda_2 a_{n+1} + \lambda_3 a_{n+2}) = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2.$$

(b) Wie sieht das für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = 0$ aus?

Lösung:

(a) Wir untersuchen die Folge der Partialsummen und setzen hierzu

$$S_k := \sum_{n=0}^{k} (\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_3 a_{n+3}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=0}^{k} \lambda_1 a_{n+1} + \sum_{n=0}^{k} \lambda_2 a_{n+2} + \sum_{n=0}^{k} \lambda_3 a_{n+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \sum_{n=2}^{k} \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_2 + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_2 a_{k+2} + \sum_{n=0}^{k-2} \lambda_3 a_{n+3} + \lambda_3 a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2 + \lambda_1 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + \lambda_2 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + \lambda_3 \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + (\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3} \\
&= \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sum_{n=2}^{k} a_{n+1} + [(\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3}].
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung entfällt der dritte Summand, denn $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Der Term in der eckigen Klammer genügt

$$\lim_{k\to\infty} [(\lambda_2 + \lambda_3) a_{k+2} + \lambda_3 a_{k+3}] = 0,$$

da (a_n) als Nullfolge vorausgesetzt war. Damit erhalten wir für die Folge (S_k) die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2,$$

was die Behauptung beweist.

(b) Wir möchten den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_1 a_n + \lambda_2 a_{n+1} + \cdots + \lambda_p a_{n+p-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{p} \lambda_m a_{n+m}$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} \sum_{m=1}^{p} \lambda_m a_{n+m} &\overset{(*)}{=} \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=0}^{k} \lambda_m a_{n+m} \overset{\text{Ind.-Shift}}{=} \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=m}^{k+m} \lambda_m a_n \overset{(**)}{=} \sum_{m=1}^{p} \lambda_m \left(\sum_{n=m}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{k+1} a_n + \sum_{n=k+2}^{k+m} a_n \right) \\
&= \sum_{m=1}^{p} \lambda_m \sum_{n=m}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{k+1} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{p} \lambda_m \right)}_{=0} a_n + \sum_{m=1}^{p} \lambda_m \sum_{n=k+2}^{k+m} a_n \\
&\overset{(***)}{=} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_n + \sum_{m=1}^{p} \lambda_m \sum_{n=2}^{m} a_{k+n}.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Summiert wird über alle $\lambda_m a_{n+m}$ mit $0 \le n \le k$ und $1 \le m \le p$. Ob erst über m und dann über n oder umgekehrt, ist wegen des Kommutativgesetzes egal.

Zu $(**)$: Die innere Summe lässt sich so aufspalten, weil die a_n mit $p \le n \le k+1$ (die mittlere Summe) unabhängig vom m immer vorkommen.

Zu $(***)$: Bei der letzten Summe wurde der Index „geshiftet“. Bei der ersten wird über alle $\lambda_m a_n$ summiert mit $1 \le m \le n \le p-1$. Ob erst über n oder erst über m, ist gleich.

Also

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_1 a_n + \lambda_2 a_{n+1} + \cdots + \lambda_p a_{n+p-1}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=1}^{p} \lambda_m a_{n+m} = \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_n + \sum_{m=1}^{p} \lambda_m \sum_{n=2}^{m} \lim_{k\to\infty} a_{k+n} \\
&= \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_n = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2 + \cdots + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1}) a_{p-1}.
\end{aligned}$$