Analysis I für M, LaG/M, Ph
5.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010
14.05.2010

Tutorium

Aufgabe T1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Sei

$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist 0 einziger Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge ist jedoch weder beschränkt noch konvergent.

(b) Die Aussage ist wahr.
Beweis: Wir bezeichnen mit a den nach Voraussetzung einzigen Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen, dass die Folge gegen diesen konvergiert. Nehmen wir an, dass wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass gilt (Negation der Konvergenz gegen a):

$$\text{Zu jedem } N_0 \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } n \geq N_0 \text{ mit } |a_n - a| \geq \varepsilon_0. \tag{1}$$

Damit basteln wir folgendermaßen eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Wir nehmen $a_{n_0} = a_{N_0}$ und für $k \geq 0$ setzen wir $a_{n_{k+1}} = a_\ell$, wobei $\ell > n_k$ der Index aus (**??**) (mit $N_0 = n_k + 1$))ist.
Als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sofort ebenfalls beschränkt, nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie also einen Häufungspunkt b. Dieser ist definitiv verschieden von a, da die Teilfolge ja gerade so gewählt war, dass

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.
Nach Lemma 2.6 gibt es nun eine Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen b konvergiert. Diese ist aber natürlich auch eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst, weshalb wiederum nach Lemma 2.6 auch diese Folge b als Häufungspunkt hat, was schließlich im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass diese Folge eben nur genau einen Häufungspunkt hat. $\square$

(c) Die Aussage ist wahr

Beweis: Aus der Konvergenz folgt mit Hilfe von Satz 1.6 sofort die Beschränktheit der Folge. Weiter zeigen wir, dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen den Grenzwert dieser Folge konvergiert, den wir mit a bezeichnen. Sei dazu eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$. Weiter gilt wegen der Eigenschaften von Teilfolgen $n_k \geq N_0$ für alle $k \geq N_0$. Also gilt

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N_0,$$

womit $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Zusammengenommen hat also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen Lemma 2.6 nur den Häufungspunkt a und damit genau einen. □

(d) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: Setze $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge beschränkt, sie weist jedoch die beiden Häufungspunkte -1 und 1 auf, ist also auch nicht konvergent.

(e) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Folgt sofort aus Aufgabenteil c).

(f) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Folgt sofort aus Aufgabenteil c).

Aufgabe T2 (Teilfolgen)

Zeigen Sie: Eine Folge (a_n) ist genau dann beschränkt, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.

Lösung: Sei (a_n) eine beschränkte Folge und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge. Da (a_n) beschränkt ist, gilt dies auch für $\left(a_{n_k}\right)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß enthält $\left(a_{n_k}\right)$ also eine konvergente Teilfolge.

Besitze nun umgekehrt jede Teilfolge von (a_n) eine konvergente Teilfolge. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, (a_n) sei unbeschränkt. Dann existiert aber eine Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)$ derart, dass $|a_{n_k}| > k$ für $k = 1, 2, \ldots$. Offensichtlich ist jede Teilfolge von $\left(a_{n_k}\right)$ unbeschränkt, d.h. $\left(a_{n_k}\right)$ enthält keine konvergente Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung und (a_n) muss somit beschränkt sein.

Aufgabe T3 (Cauchy-Kriterium)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die Folge

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

divergiert.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die Folge

$$b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

konvergiert.

Lösung:

(a) Wir wählen $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$. Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig groß. Dann gilt für die Wahl $n > n_0$, $m = 2n$

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \epsilon_0$$

Das Cauchy-Kriterium ist für $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$ also verletzt, die Folge (a_n) somit keine Cauchy-Folge.

(b) Sei o.B.d.A. $m > n$, d.h. $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$b_{n+k} - b_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} \right).$$

Der geklammerte Ausdruck ist positiv, was man leicht durch umklammern in der Form

$$\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \ldots$$

einsieht (der letzte Summand $\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$ bleibt nur bei ungeradem k übrig und ist in dem Fall positiv). Andererseits erkennt man durch umklammern in der Form

$$\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) + \ldots,$$

dass der Ausdruck $< \frac{1}{n+1}$ ist.
Es folgt somit, dass für alle k

$$|b_{n+k} - b_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} < \frac{1}{n+1},$$

woraus wiederum folgt, dass b_n dem Cauchy-Kriterium genügt.